

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"  
Набережночелнинский институт (филиал)  
Отделение информационных технологий и энергетических систем



## **Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Моделирование объектов и систем управления"**

Специальность: 27.05.01 Специальные организационно-технические системы

Специализация: Автоматизация технологических процессов и производств в специальных организационно-технических системах

Квалификация выпускника: Инженер-системотехник

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

**Автор(ы):** Демьянов Д.Н.

**Рецензент(ы):** Валиев Р.А.

### **СОГЛАСОВАНО:**

И.о. заведующего кафедрой САиИ: Карабцев В.С.

Протокол заседания кафедры No 6 от "24" 05 2019г.

Учебно-методическая комиссия Высшей инженерной школы (Отделение информационных технологий и энергетических систем) (Набережночелнинский институт (филиал)):

Протокол заседания УМК No 9 от "27" 05 2019г.

## Оглавление

Введение.....	4
Лабораторная работа № 1. Создание математической модели динамического процесса .....	5
Лабораторная работа № 2. Исследование математической модели динамического процесса .....	14
Лабораторная работа № 3. Разработка и исследование нелинейной математической модели динамического процесса.....	30
Список источников.....	48

## **Введение**

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для студентов, стремящихся закрепить теоретические знания и овладеть практическими навыками построения и исследования математических моделей. В пособии последовательно рассмотрены основные этапы математического моделирования: изучение объекта и постановка задачи, формирование математической модели, исследование математической модели с помощью ЭВМ, анализ полученных результатов. Отдельно рассмотрены особенности математического моделирования объектов и процессов в случае нелинейности их характеристик.

Пособие разбито на 3 раздела, в каждом из которых рассматривается тот или иной аспект математического моделирования, приводится краткая теоретическая справка, разбирается методический пример, а также даются варианты заданий для самостоятельного выполнения.

# Лабораторная работа № 1.

## Создание математической модели динамического процесса

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при создании математических моделей процессов различной природы.

**Задание:** разработать математическую модель динамического процесса согласно индивидуальному варианту.

### **Этапы работы:**

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить рассматриваемый динамический процесс.
3. Сформулировать содержательную постановку задачи.
4. Сформулировать концептуальную постановку задачи.
5. Сформулировать математическую постановку задачи.
6. Проверить корректность поставленной задачи.
7. Оформить отчет по лабораторной работе.

### **Отчет о работе должен содержать:**

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Содержательную постановку задачи.
3. Концептуальную постановку задачи.
4. Математическую постановку задачи.
5. Анализ полученной системы уравнений.
6. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### **Варианты заданий.**

Провести математическое моделирование следующих динамических процессов:

1. Падение тела при отсутствии ветра.
2. Движение лодки по озеру при отсутствии течений.
3. Зарядка конденсатора, включенного последовательно с резистором.

4. Остывание тела малого объёма, погруженного в жидкость.
5. Вытекание жидкости из резервуара цилиндрической формы.
6. Качение колеса по наклонной плоскости без скольжения.
7. Скольжение тела по наклонной плоскости.
8. Движение лодки по реке при наличии течения.
9. Вертикальные колебания груза, подвешенного на пружине.
10. Вертикальные колебания груза, соединенного двумя пружинами с неподвижными стенками.
11. Всплытие тела малой плотности, изначально покоившегося на дне резервуара с жидкостью.
12. Крутильные колебания диска, закрепленного на невесомом деформируемом стержне.
13. Горизонтальные колебания груза, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.
14. Горизонтальные колебания груза, соединенного двумя пружинами с неподвижными стенками.
15. Подключение резистора и катушки индуктивности, соединенных последовательно, к источнику постоянного напряжения.
16. Движение по наклонной поверхности груза, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.
17. Скольжение тела по горизонтальной поверхности под действием ветра.
18. Движение лодки с парусом по реке при наличии попутного ветра и встречного течения.
19. Соскальзывание с гладкого крюка переброшенной через него металлической цепи.

20. Погружение в жидкость рыхлого тела (плотность тела меньше плотности жидкости).
21. Движение тела, брошенного под углом к горизонту с большой начальной скоростью.
22. Зарядка конденсатора, включенного последовательно с катушкой индуктивности и резистором, от источника постоянного напряжения.
23. Всплытие подводной лодки, движущейся при этом с постоянной продольной скоростью.
24. Вращение в горизонтальной плоскости тела, прикрепленного к оси вращения невесомым деформируемым стержнем.
25. Разрядка конденсатора, включенного параллельно двум ветвям, содержащим катушку индуктивности и резистор.
26. Нагрев теплоизолированного резистора, подключенного к разряжающемуся конденсатору.
27. Движение жидкости в U-образной трубке постоянного сечения с идеально гладкими стенками.
28. Погружение в жидкость плотного тела (плотность тела больше плотности жидкости).
29. Падение тела при наличии бокового ветра.
30. Горизонтальное движение колеса, соединенного пружиной с неподвижной стенкой.

### ***Теоретическая справка***

**Математическое моделирование** – это такое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели производится с использованием тех или иных математических методов.

Математическое моделирование является частным случаем информационного (абстрактного, теоретического) моделирования, при котором описание модели осуществляется на одном из формальных языков кодирования информации.

Первым этапом построения математической модели является изучение рассматриваемого объекта, процесса или явления и **содержательная постановка задачи** – перечень интересующих нас вопросов об объекте моделирования, сформулированных в содержательной (словесной) форме.

Следующим этапом является **концептуальная постановка задачи** – перечень интересующих нас вопросов об объекте моделирования, сформулированных в терминах соответствующих дисциплин, а также перечень гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

Данные этапы являются наиболее важными в процессе построения модели, так как ошибки, допущенные при постановке задачи и формулировке гипотез, практически наверняка приведут к неадекватности полученной модели и невозможности её практического использования.

Третьим этапом построения математической модели является **математическая постановка задачи** – совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. При этом исходная физическая задача сводится, как правило, к одной из типовых математических задач: решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решению системы дифференциальных уравнений в частных производных, решению системы интегро-дифференциальных уравнений и т. д.

Перед тем, как решать тем или иным способом полученную математическую задачу, целесообразно провести её анализ. Для контроля правильности полученных соотношений требуется провести следующие проверки:

- контроль размерности (складывать и вычитать можно только величины, имеющие одинаковую размерность);

- контроль порядков (используемые величины должны иметь сходный порядок);
- контроль характера зависимостей (вид взаимосвязи параметров должен соответствовать физическому смыслу);
- контроль экстремальных ситуаций и особых точек (вид математических соотношений в случае предельных значений параметров);
- контроль граничных условий (все граничные условия должны быть указаны и использованы при составлении уравнений);
- контроль математической замкнутости (полученные математические соотношения позволяют получить единственное решение задачи).

Математическая модель называется **корректной**, если для неё осуществлён и получен положительный результат всех контрольных проверок.

### *Пример*

Требуется построить математическую модель полёта брошенного камня.

Графическая иллюстрация рассматриваемого процесса представлена на рисунке 1.1.

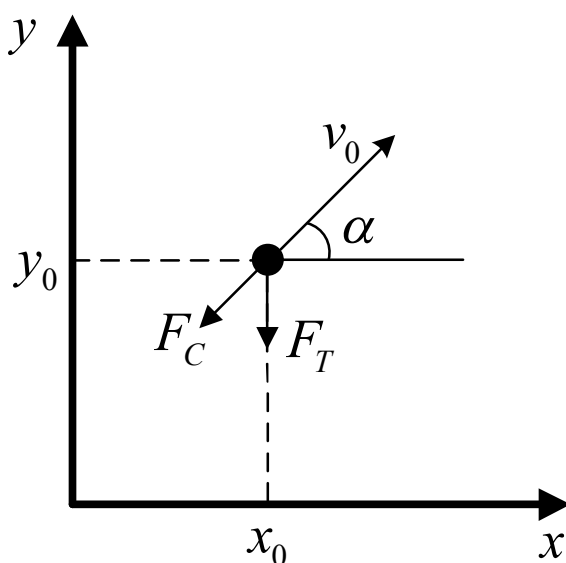


Рисунок 1.1 – Графическая иллюстрация изучаемого процесса



**Содержательная постановка задачи:** Разработать математическую модель движения камня, брошенного под углом к горизонту. Модель должна позволять определять координаты камня и его скорость в любой момент времени

**Концептуальная постановка задачи:** Определить закон движения материальной точки массой  $m$ , движущейся под действием внешних сил, если известны её начальные координаты  $(x_0, y_0)$ , начальная скорость  $v_0$  и угол бросания  $\alpha$ .

Принятые гипотезы:

- движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения  $g$ ;
- сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости тела с коэффициентом пропорциональности  $k$ ;
- динамика объекта моделирования описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- скорость движения объекта моделирования много меньше скорости звука;
- влияние ветра на движение объекта моделирования не рассматривается;
- эффектами, вызванными собственным вращением камня вокруг центра масс, можно пренебречь;
- земная поверхность считается плоской, а её уровень соответствует значению  $y = 0$ .

Для нахождения математических соотношений, описывающих рассматриваемый процесс, спроектируем уравнения второго закона Ньютона на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x; \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y. \end{cases}$$

Дополним полученные уравнения известными из кинематики соотношениями между скоростями и координатами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases}$$

Начальные условия и ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; & x(0) = x_0; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; & y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, исходная задача свелась к решению задачи Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m} v_y; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Проведём анализ полученной системы уравнений. Для этого последовательно осуществим ряд проверок.

1. Размерности правой и левой частей всех уравнений совпадают:

$$\begin{cases} \left[ \frac{M/c}{c} \right] = \left[ \frac{kg/c}{kg} \right] \left[ \frac{M}{c} \right]; \\ \left[ \frac{M/c}{c} \right] = \left[ \frac{M}{c^2} \right] + \left[ \frac{kg/c}{kg} \right] \left[ \frac{M}{c} \right]; \\ \left[ \frac{M}{c} \right] = \left[ \frac{M}{c} \right]; \\ \left[ \frac{M}{c} \right] = \left[ \frac{M}{c} \right]. \end{cases}$$

2. Величины в правой части уравнения имеют схожие порядки.

3. Характер полученных зависимостей соответствует физическому смыслу рассматриваемого процесса:

- сопротивление воздуха тормозит движение во всех направлениях;
- сила тяжести способствует уменьшению вертикальной составляющей скорости;
- величина замедления прямо пропорциональна коэффициенту сопротивления воздуха;
- величина замедления обратно пропорциональна массе.

4. В пределе при  $k \rightarrow 0$  (сопротивление воздуха не учитывается) получаемые зависимости имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = 0; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos \alpha; \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt; \\ x = x_0 + v_0 \cos \alpha t; \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \end{array} \right. y \geq 0.$$

Полученные результаты совпадают с известными теоретическими положениями о характере движения тела без учёта сопротивления воздуха.

5. Все граничные условия заданы.

6. Существование и единственность решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений показана теоретически.

Таким образом, получена корректная математическая модель, описывающая рассматриваемый динамический процесс.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое математическая модель, математическое моделирование?
2. Опишите основные этапы построения математической модели.
3. Что называется содержательной постановкой задачи моделирования?
4. Что называется концептуальной постановкой задачи моделирования?
5. Что называется математической постановкой задачи моделирования?
6. В каком случае математическая модель называется корректной?

## **Лабораторная работа № 2.**

### **Исследование математической модели динамического процесса**

*Цель работы:* практическое применение знаний в области математики и физики при исследовании математических моделей процессов различной природы.

*Задача:* провести исследование математической модели заданного процесса.

#### *Этапы работы:*

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить полученную в лабораторной работе №1 математическую постановку задачи моделирования.
3. Найти аналитическое решение поставленной задачи.
4. Найти численное решение поставленной задачи.
5. Сравнить между собой результаты п. 3 и п. 4 при различных параметрах использованного численного метода.
6. Проверить адекватность полученной модели.
7. Исследовать динамику рассматриваемого процесса при различных сочетаниях параметров (2-3 комбинации по указанию преподавателя).
8. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### *Отчет о работе должен содержать:*

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Математическую постановку задачи.
3. Аналитическое решение поставленной задачи.
4. Численное решение поставленной задачи.
5. Сравнение аналитического и численного решения при различных значениях шага интегрирования.
6. Оценку адекватности полученной модели.

7. Результаты моделирования рассматриваемого процесса при различных сочетаниях параметров модели.
8. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### ***Варианты заданий.***

Совпадают с тем, что были заданы при выполнении лабораторной работы № 1.

### ***Теоретическая справка***

Полученное в форме некоторой математической задачи описание изучаемого объекта, процесса или явления, как правило, является достаточно сложным для восприятия и не позволяет судить о качественных и количественных закономерностях протекания процесса. Поэтому для практического использования построенной модели сформированное уравнение (систему уравнений) требуется решить.

Методы реализации математической модели (способы решения поставленной математической задачи) подразделяются на аналитические и алгоритмические.

При **аналитическом** методе реализации математической модели сведения о подлежащих определению величинах представляются в форме явной функциональной зависимости от входных воздействий, параметров объекта моделирования и времени.

При **алгоритмическом** методе реализации математической модели сведения о подлежащих определению величинах представляются в виде некоторого алгоритма, выполнение которого позволяет получить значения интересующих нас величин.

Как правило, аналитические решения являются более предпочтительными с точки зрения удобства использования, однако они могут быть найдены только для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров. Алгоритмические решения менее точные и менее удобные в использовании, однако, они могут быть найдены практически для любых математических моделей, при этом основным ограничением являются характеристики используемой для расчётов ЭВМ.

При алгоритмическом решении задачи используется, как правило, два основных подхода: численный и имитационный.

При **численном** решении совокупность математических соотношений исходной модели заменяется её конечномерным аналогом. Это, чаще всего, достигается дискретизацией исходных соотношений, т. е. переходом от функции непрерывного аргумента к функции дискретного аргумента (при этом дифференциальные уравнения сводятся к алгебраическим). После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма – последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение дискретной задачи. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

При **имитационном** решении на отдельные составляющие разбивается сам объект исследования. При этом для каждого из его элементов задаётся закон функционирования, определяющий его реакцию на внешние воздействия и характер взаимодействия с другими элементами (реализация этого закона может быть как аналитической, так и алгоритмической). Имитационные модели используются, как правило, в тех случаях, когда создание единой модели объекта сопряжено с очень большими трудностями, имеющиеся математические методы не позволяют получить удовлетворительных аналитических или численных решений рассматриваемой задачи или же при описании объекта моделирования используется различный математический аппарат.

После получения модели в том или ином виде следует провести проверку её **адекватности**, под которой понимается степень соответствия результатов, получаемых с использованием созданной модели, результатам экспериментов или решениям тестовых задач.

Проверка адекватности преследует две основных цели:

1. Убедиться в справедливости принятой системы гипотез.
2. Установить точность получаемых результатов.

Решение вопроса о точности моделирования зависит от назначения модели и предъявляемым к ней требованиям. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных, предварительных расчётов, удовлетворительной может считаться точность 10-15%. В моделях, используемых в системах управления, требуемая точность может достигать 1-2%.

Различают качественное и количественное совпадение результатов сравнения.

**Качественное** совпадение результатов – совпадение некоторых характерных особенностей в распределении исследуемых параметров (наличие экстремальных точек, возрастание или убывание переменных, вид траектории). **Количественное** совпадение результатов – расхождение полученных данных и эталонных значений, выраженное в абсолютных показателях, долях или процентах.

Если по результатам проверки модель будет признана неадекватной, то использовать её в практической деятельности нельзя – требуется последовательно вернуться на предыдущие этапы и исправить допущенные на них ошибки.

Возможные причины неадекватности модели:

1. Одна или несколько исходных гипотез неверны.
2. Использованные значения параметров модели некорректны.
3. Задаваемые значения параметров не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез.
4. Использован некорректный численный метод или корректный численный метод с некорректными параметрами.
5. Допущены ошибки при решении полученной системы уравнений или при программной реализации численного метода.

После проверки и исправления допущенных ошибок следует повторно провести проверку адекватности модели. Только после того, как модель признана адекватной, возможно её практическое использование.



### Пример

Ранее в лабораторной работе № 1 была получена математическая модель движения камня, брошенного под углом к горизонту. С учётом принятых ограничений и допущений, исходная задача свелась к решению задачи Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x; \\ \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{k}{m}v_y; \\ \frac{dx}{dt} = v_x; \\ \frac{dy}{dt} = v_y. \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Требуется провести исследование этой математической модели.

#### Аналитическое решение задачи.

Первые два уравнения системы являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Чтобы найти их общее решение, осуществим разделение переменных:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt; \\ \frac{dv_y}{v_y + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt. \end{cases}$$

Проинтегрируем обе части полученных уравнений:

$$\begin{cases} \ln v_x = -\frac{k}{m}t + C_1; \\ \ln \left( v_y + \frac{mg}{k} \right) = -\frac{k}{m}t + C_2. \end{cases}$$

Здесь символами  $C_1$  и  $C_2$  обозначены некоторые константы интегрирования, конкретные значения которых определяются исходя из начальных условий.

Выразим в явном виде уравнения для продольной и поперечной составляющих скорости:

$$\begin{cases} v_x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} \\ v_y = C_2 e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Определим константы интегрирования, подставив в полученные уравнения при  $t = 0$  начальные значения скорости:

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = C_1 ; \\ v_0 \sin \alpha = C_2 - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Из полученной системы определим константы интегрирования:

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha ; \\ C_2 = v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Подставив найденные значения в полученное ранее общее решение, получим:

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} ; \\ v_y = \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в оставшиеся два уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} ; \\ \frac{dy}{dt} = \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}. \end{cases}$$

Осуществим разделение переменных:

$$\begin{cases} dx = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} dt ; \\ dy = \left( \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \right) dt. \end{cases}$$

Теперь проинтегрируем обе части полученных уравнений:

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} + C_3; \\ y = -\frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + C_4. \end{cases}$$

Здесь символами  $C_3$  и  $C_4$  обозначены некоторые константы интегрирования, конкретные значения которых определяются исходя из начальных условий.

Определим константы интегрирования, подставив в полученные уравнения при  $t = 0$  начальные координаты тела:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) + C_3; \\ y_0 = -\frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) + C_4. \end{cases}$$

Из полученной системы определим константы интегрирования:

$$\begin{cases} C_3 = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha); \\ C_4 = y_0 + \frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right). \end{cases}$$

Подставив найденные значения в полученное ранее общее решение, получим:

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t} + x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha); \\ y = -\frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + y_0 + \frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right). \end{cases}$$

Для повышения удобства использования преобразуем полученные системы, приведя подобные:

$$\begin{cases} v_x = (v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t}; \\ v_y = \left( v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}; \\ x = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) - \frac{m}{k}(v_0 \cos \alpha) e^{-\frac{k}{m}t}; \\ y = y_0 + \frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) - \frac{m}{k} \left( \frac{mg}{k} + v_0 \sin \alpha \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t. \end{cases}$$

Полученные соотношения в явном виде определяют зависимость от времени скоростей и координат движущейся материальной точки, т. е. подставляя в полученную формулу конкретное значение  $t$ , мы можем получить значение скорости и координаты в любой момент времени.

### **Алгоритмическое решение задачи.**

В рассматриваемом случае применение имитационного моделирования не целесообразно, так как рассматриваемый процесс является сравнительно простым и описывается только уравнениями динамики материальной точки. Поэтому будем искать численное решение поставленной задачи с использованием методов вычислительной математики.

Осуществим дискретизацию по времени, перейдя к рассмотрению исследуемого процесса только в некоторые фиксированные моменты времени, расстояние между которыми называется шагом дискретизации. При этом дифференциальные уравнения, описывающие динамику объекта, преобразуются в алгебраические уравнения.

Воспользуемся для решения задачи Коши одним из простейших численных методов – методом Эйлера. При этом значение производной может быть приближенно заменено отношением:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{h}.$$

Здесь  $y(i)$  - значение функции в текущей точке,  $y(i+1)$  - значение функции в следующей точке, а величина  $h$  равна интервалу времени между двумя отсчётами и называется **шагом интегрирования**.

Перейдя от дифференциальных уравнений к разностным, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_x(i+1) - v_x(i)}{h} = -\frac{k}{m}v_x(i); \\ \frac{v_y(i+1) - v_y(i)}{h} = -g - \frac{k}{m}v_y(i); \\ \frac{x(i+1) - x(i)}{h} = v_x(i); \\ \frac{y(i+1) - y(i)}{h} = v_y(i). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Откуда в явном виде выразим значения функций в следующей точке:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(i+1) = v_x(i) - h\frac{k}{m}v_x(i); \\ v_y(i+1) = v_y(i) - h\left(g + \frac{k}{m}v_y(i)\right); \\ x(i+1) = x(i) + hv_x(i); \\ y(i+1) = y(i) + hv_y(i). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = v_0 \cos \alpha; \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha; \\ x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Полученные соотношения позволяют определить значения искомых функций в последующий момент времени, зная их значения в предыдущий момент времени.

Определив аналитическое и/или алгоритмическое решение задачи, мы можем провести исследование динамики изучаемого процесса.

Выберем для определенности следующие параметры процесса:

1. начальная скорость  $v_0 = 10$  м/с;
2. угол бросания  $\alpha = 30^\circ$ ;
3. масса  $m = 1$  кг;
4. коэффициент сопротивления воздуха  $k = 0,1$  кг/с;
5. начальные координаты  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  (точка бросания располагается в начале системы координат);
6. интервал времени между отсчётами  $h = 0,01$  с;
7. ускорение свободного падения  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

Тогда формулы аналитического решения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} v_x = 8,66e^{-0,1t} ; \\ v_y = 103,1e^{-0,1t} - 98,1 ; \\ x = 86,6 - 86,6e^{-0,1t} ; \\ y = 1031 - 1031e^{-0,1t} - 98,1t. \end{cases} \quad y \geq 0.$$

Формулы численного решения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{cases} v_x(i+1) = 0,99v_x(i); \\ v_y(i+1) = 0,99v_y(i) - 0,981; \\ x(i+1) = x(i) + 0,1v_x(i); \\ y(i+1) = y(i) + 0,1v_y(i). \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(0) = 8,66; \\ v_y(0) = 5; \\ x(0) = 0; \\ y(0) = 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Для повышения наглядности восприятия построим графики изменения рассматриваемых величин. Это можно сделать с помощью любого доступного математического пакета (MATLAB, Mathematic, Maple, MathCAD и т. д.). Воспользуемся наиболее простым инструментом для проведения расчётов – программой Microsoft Excel из пакета Microsoft Office.

Результаты табулирования функций, задающих аналитическое и численное решение поставленной задачи, представлены на рисунке 2.1 и рисунке 2.2.

На рисунке 2.1 показано, как изменяется со временем продольная и поперечная составляющая скорости. При выбранном значении  $h$  результаты аналитического и численного решения весьма близки друг к другу (наибольшее расхождение составляет около 0,01 м/с и на графике не видно).

На рисунке 2.2 показаны 2 траектории движения: первая получена с использованием аналитического выражения, а вторая – численным методом.

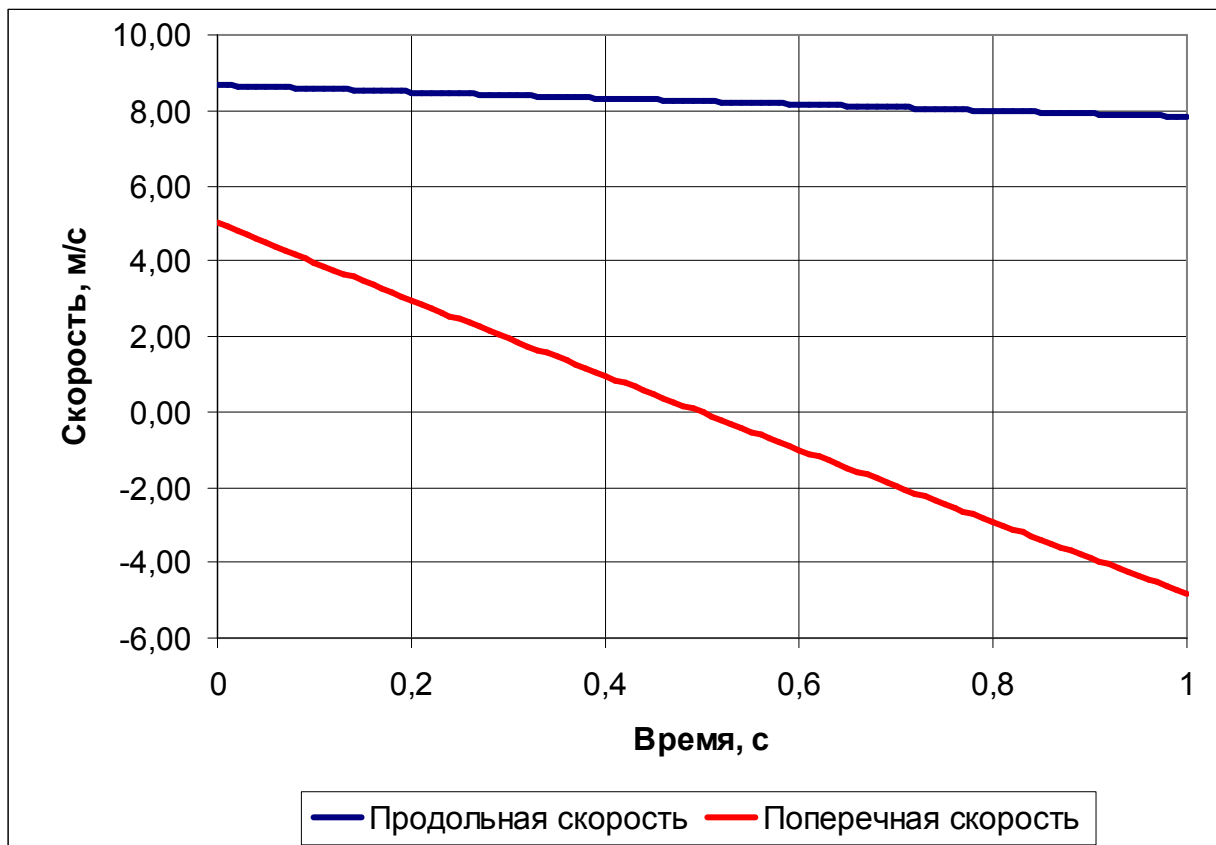


Рисунок 2.1 – Изменение скорости при  $h = 0,01$  с

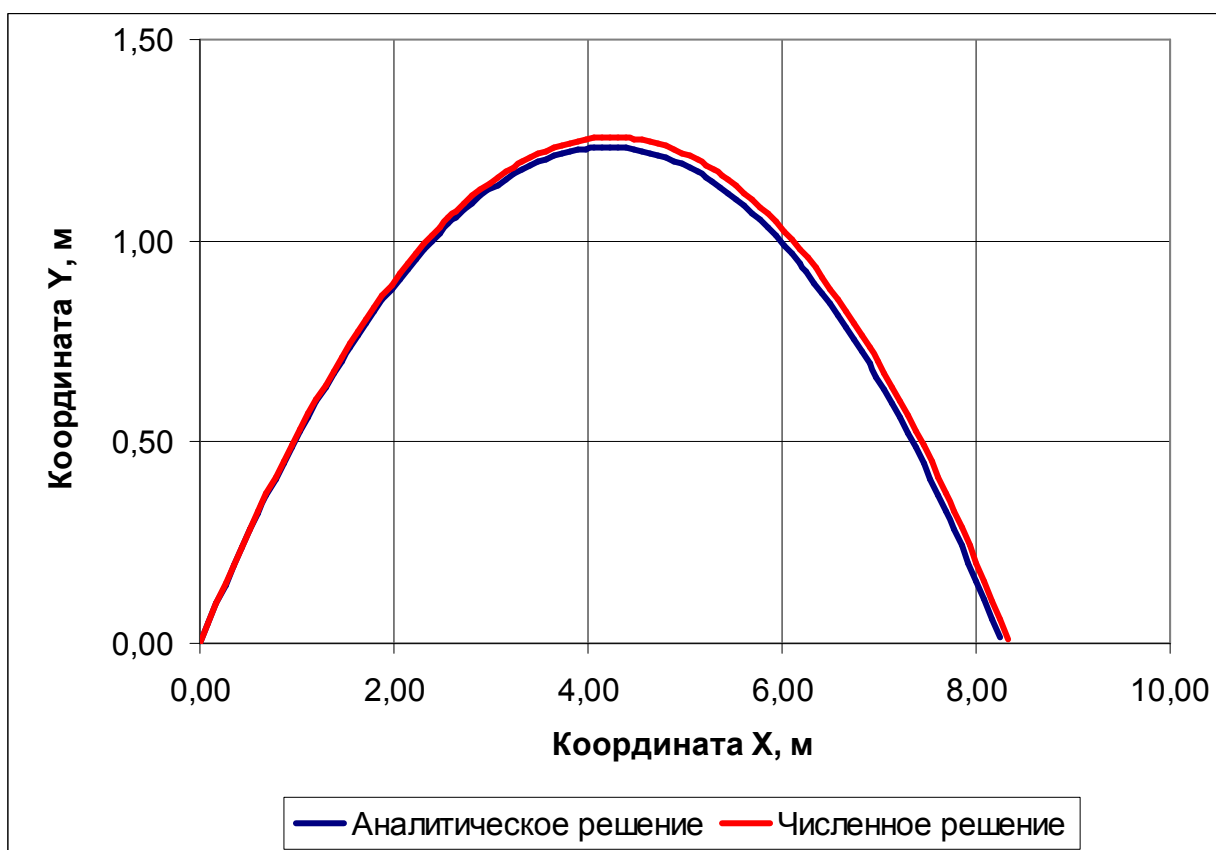


Рисунок 2.2 – Траектории при  $h = 0,01$  с

Сравнение показывает, что графики аналитического и численного решения весьма близки друг к другу. При этом полученные результаты качественно совпадают с известными сведениями о движении тела, брошенного под углом к горизонту с малой начальной скоростью (траектория близка по своей форме к параболе).

Если мы увеличим расстояние между соседними точками, и выберем величину шага  $h$  равной 0,05 с, то график аналитического решения останется прежним, а график численного решения изменится. На рисунке 2.3 показаны результаты моделирования с новым значением шага. Качественно траектории по-прежнему близки, но количественное различие между ними уже весьма существенно. Этот факт обусловлен тем, что точность численного решения зависит от выбранной величины шага – чем она меньше, тем решение точнее (и тем ближе оно к аналитическому решению).

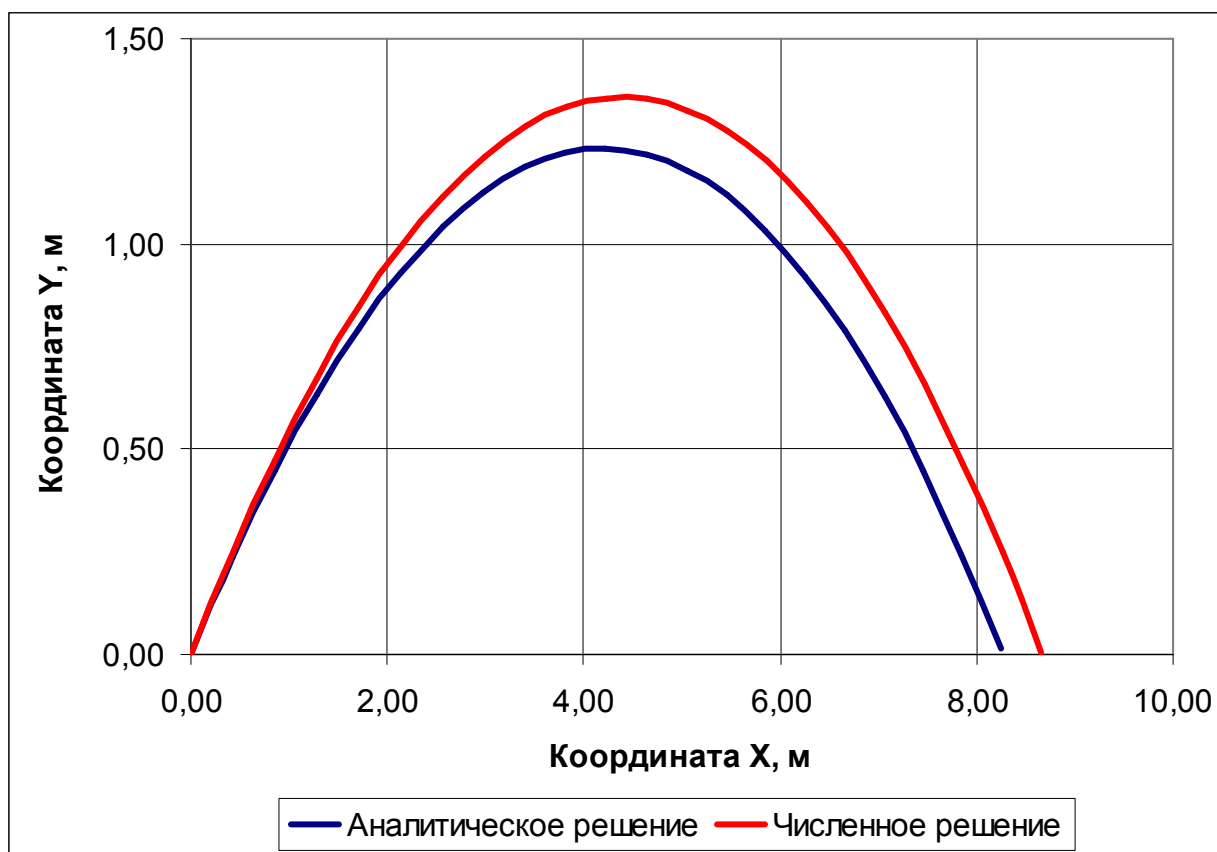


Рисунок 2.3 – Траектории при  $h = 0,05$  с

Для сравнения на рисунке 2.4 приведён результат моделирования при шаге 0,5 с. Показатели численного решения (дальность полёта,



наибольшая высота подъёма) весьма существенно отличаются от результатов аналитического решения задачи.

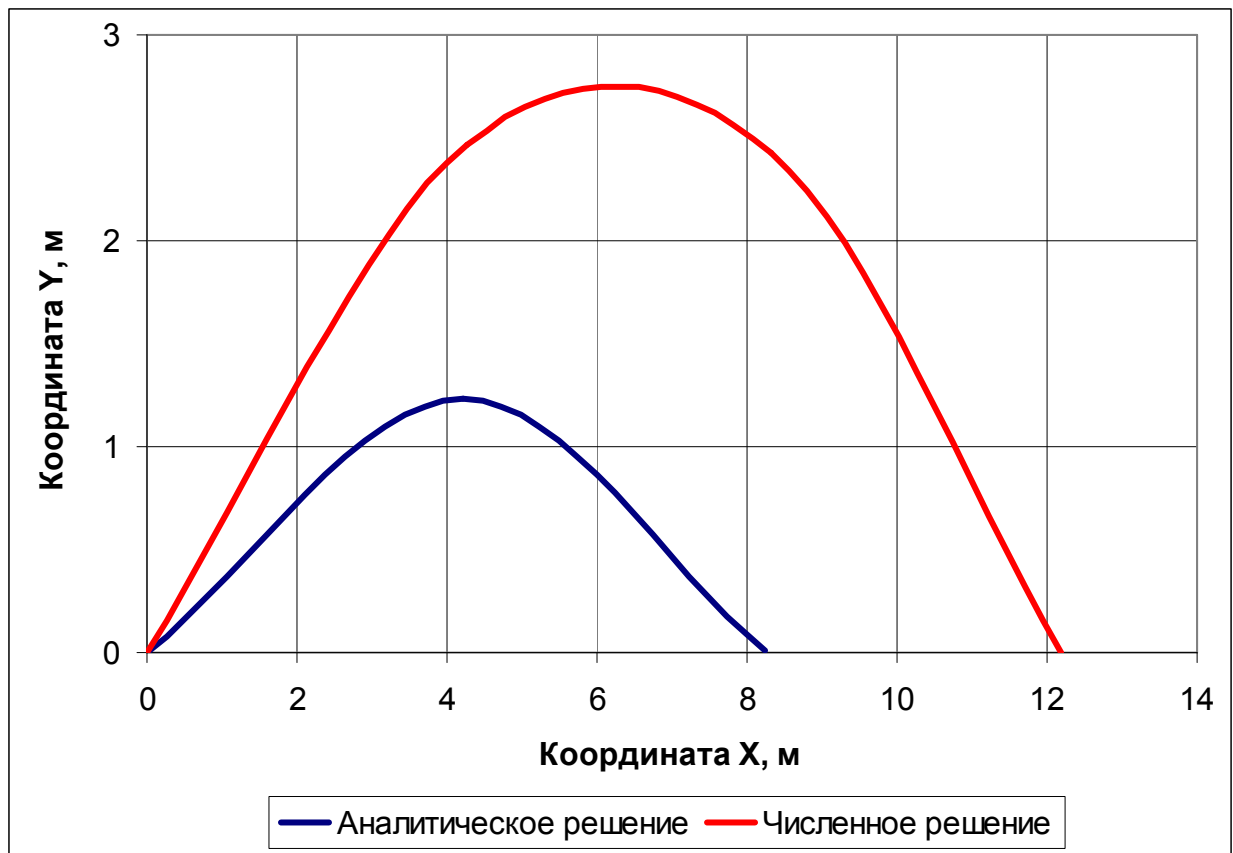


Рисунок 2.4 – Траектории при  $h = 0,5$  с

Следует отметить, что в ряде случаев некорректно выбранный шаг численного метода может привести к получению некорректных результатов: и качественно, и количественно полученные зависимости будут отличаться от аналитического решения и от реальной динамики изучаемых процессов. Более подробные сведения о численном решении систем дифференциальных уравнений содержатся в специальных разделах соответствующих дисциплин учебного плана.

Так как форма траектории и характер зависимостей совпадает с известными теоретическими положениями и результатами экспериментов, можно утверждать, что полученная модель является адекватной.

Исследуем зависимость получаемых решений задачи от сочетания параметров модели. Для проведения исследований будем использовать аналитическое решение задачи как более точное.

Исследуем, как зависит траектория движения от угла бросания. На рисунке 2.5 показаны графики для трёх значений угла  $\alpha=30^\circ$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $\alpha=60^\circ$ . Результаты моделирования соответствуют известному теоретическому положению о том, что наибольшая дальность полёта брошенного тела достигается при угле бросания  $45^\circ$ .

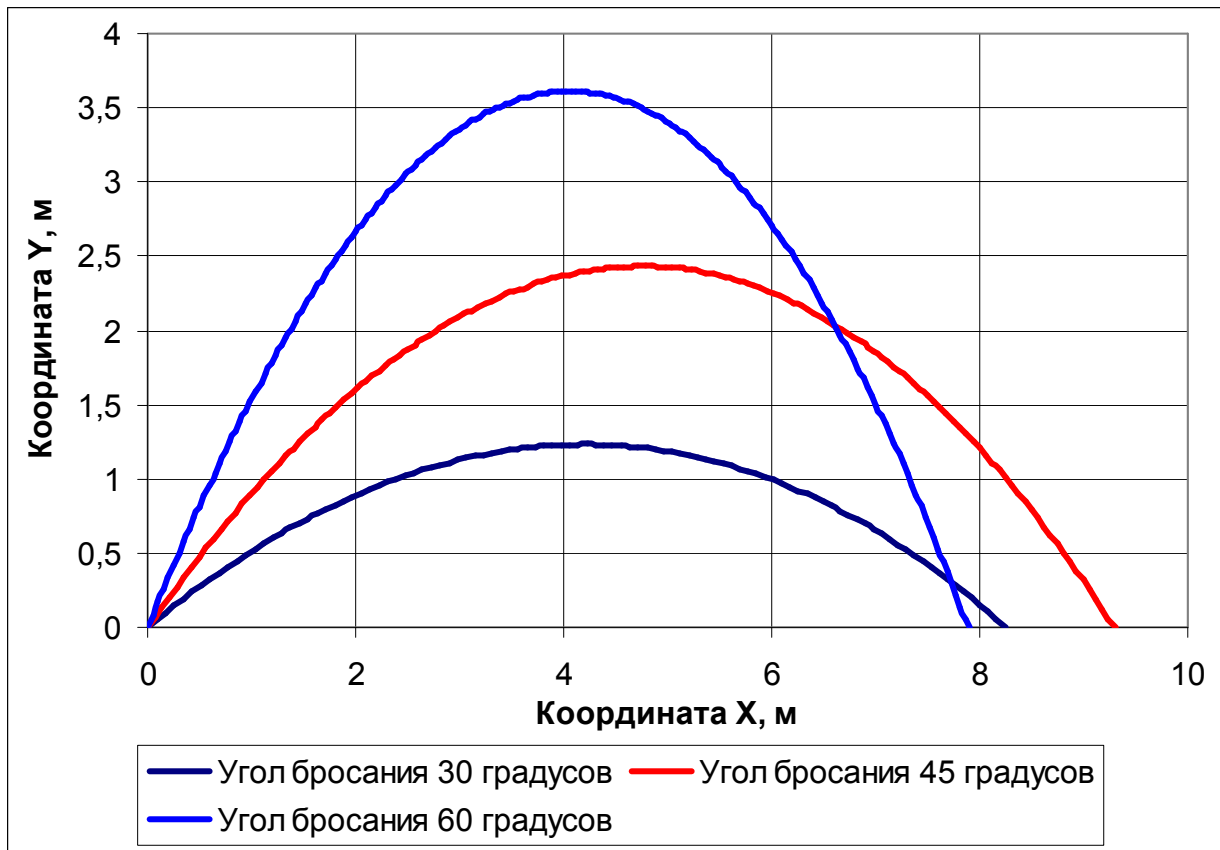


Рисунок 2.5 – Траектории при различных углах бросания.

Исследуем, как зависит траектория от других параметров. На рисунке 2.6 показаны графики для трёх значений массы  $m=0,1$  кг,  $m=1$  кг,  $m=10$  кг. Результаты моделирования соответствуют известным сведениям из практики о том, что чем больше масса тела при неизменной начальной скорости и угле бросания, тем дальше оно улетит.

На рисунке 2.7 показаны графики для трёх значений коэффициента сопротивления  $k=0,01$  кг/с;  $k=0,1$  кг/с;  $k=1$  кг/с. Результаты моделирования также соответствуют известным сведениям из практики и теоретическим положениям (чем выше сопротивление среды, тем меньше дальность и высота полёта).

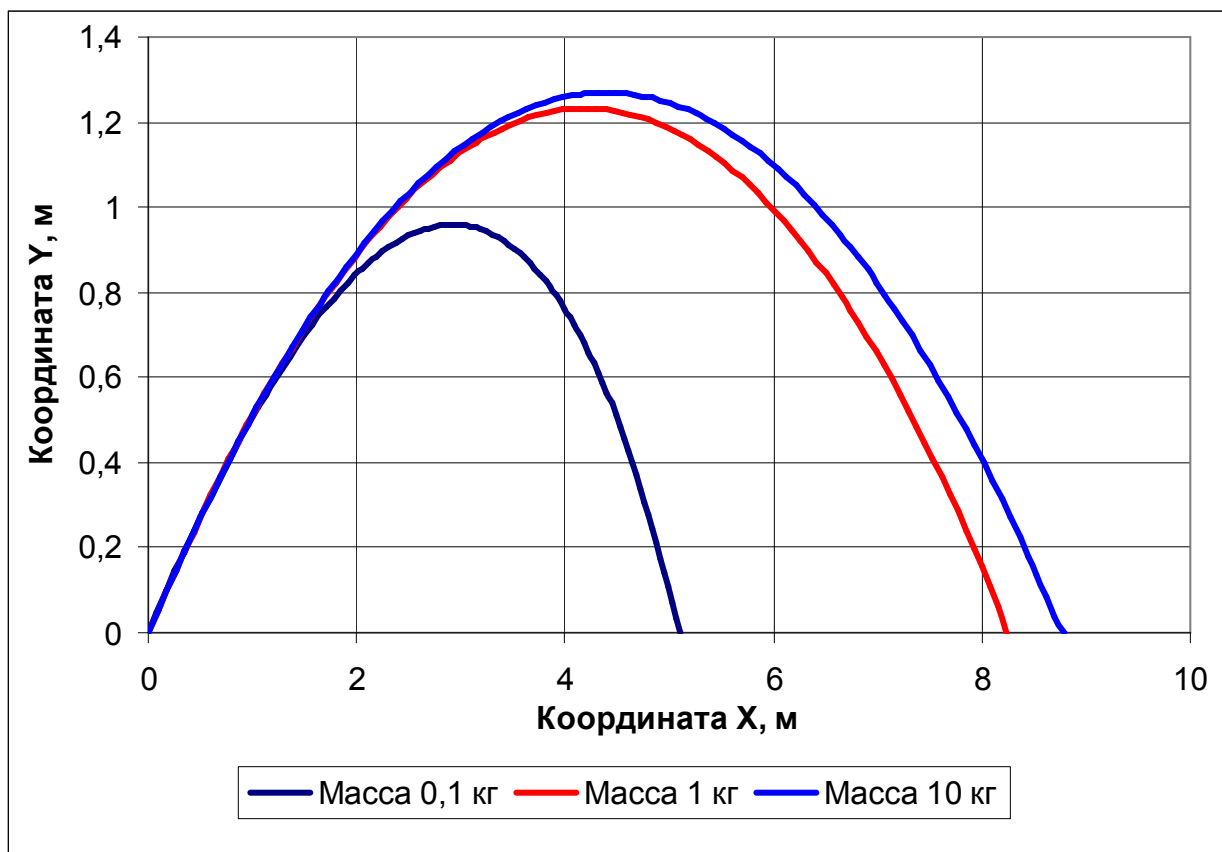


Рисунок 2.6 – Траектории при различных значениях массы

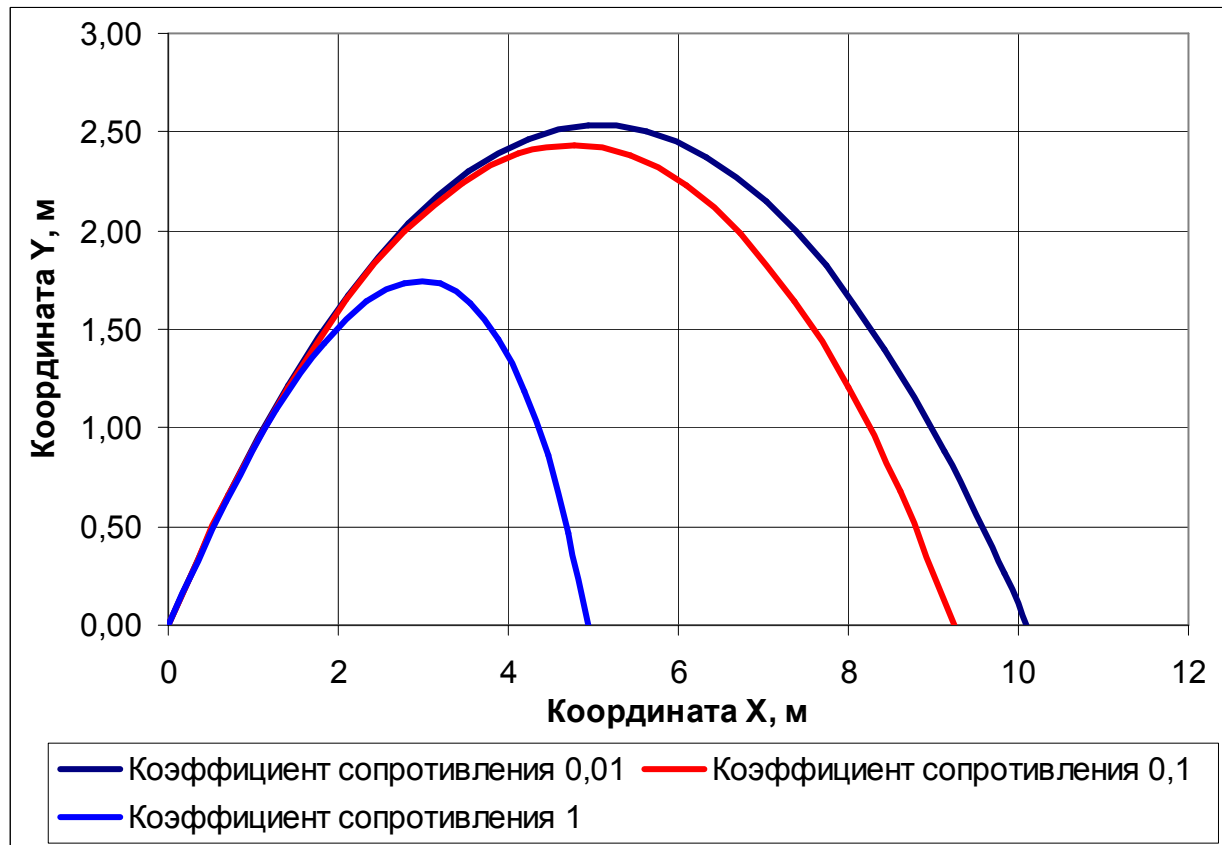


Рисунок 2.7 – Траектории при различных значениях  $k$

Таким образом, сформированная математическая модель может быть использована для прогнозирования динамики исследуемого процесса при интересующих нас сочетаниях параметров, а также для оптимизации параметров с целью достижения требуемых показателей (например, подбор оптимального угла бросания для попадания в заданную точку при наличии ограничения по максимальной высоте).

Следует отметить, что в настоящее время для проведения численного исследования математических моделей чаще всего используются специализированные пакеты прикладных программ, позволяющие находить решение задачи с наименьшими затратами вычислительных ресурсов и наибольшей точностью.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что называется аналитическим решением задачи?
2. Что называют численным решением задачи?
3. В каких случаях рекомендуется использовать аналитическое, а в каких – численное решение задачи?
4. Какая модель называется адекватной?
5. Как можно оценить адекватность модели?
6. Каковы возможные причины неадекватности модели?

## **Лабораторная работа № 3.**

### **Разработка и исследование нелинейной математической модели динамического процесса**

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при создании и исследовании нелинейных математических моделей процессов различной природы.

**Задача:** разработать нелинейную математическую модель заданного процесса, провести её линеаризацию и исследование.

#### ***Этапы работы:***

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить рассматриваемый динамический процесс.
3. Разработать математическую модель изучаемого процесса и оценить принципиальную возможность аналитического решения полученного уравнения динамики.
4. Определить значения параметров процесса, соответствующие установившемуся режиму.
5. Линеаризовать полученную математическую модель в окрестностях установившегося режима.
6. Найти аналитическое решение линеаризованного уравнения динамики при некотором сочетании параметров.
7. Найти численное решение уравнения динамики в окрестностях установившегося режима.
8. Сравнить между собой результаты п. 7 и п. 8 при различных величинах отклонений от установившегося режима.
9. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### ***Отчет о работе должен содержать:***

1. Описание исследуемого динамического процесса с его графической иллюстрацией.
2. Нелинейную математическую модель изучаемого процесса.
3. Условия установившегося режима.
4. Процедуру линеаризации полученной модели.

5. Аналитическое решение линейного уравнения динамики.
6. Численное решение нелинейного уравнения динамики.
7. Сравнение результатов, полученных для линейной и нелинейной модели, при различных отклонениях от установившегося режима.
8. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### ***Варианты заданий.***

Провести математическое моделирование следующих динамических процессов:

1. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса.
2. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса.
3. Движение груза малого размера по внутренней поверхности идеально гладкого положенного на бок цилиндра.
4. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
5. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при условии, что вся конструкция помещена в сосуд с жидкостью.
6. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
7. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, при наличии постоянного бокового ветра.
8. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижного основания.
9. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при

помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижного основания.

10. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса и идеальным упругим элементом – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

11. Движение однородного недеформируемого стержня, один из концов которого соединен с неподвижной точкой подвеса, а второй при помощи идеального упругого элемента – с одной из точек неподвижной вертикальной стенки.

12. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается внизу).

13. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а вся конструкция помещена между обкладками плоского заряженного конденсатора (пластина с отрицательным зарядом располагается сверху).

14. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.

15. Движение груза малого размера, соединенного невесомым недеформируемым стержнем с неподвижной точкой подвеса, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.

16. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
17. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды).
18. Движение однородного по массе тела сферической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
19. Движение однородного по массе тела конической формы и малой плотности, погруженного в воду (плотность тела меньше плотности воды), соединенного идеальным упругим элементом с неподвижной точкой подвеса (центра масс тела располагается точно под точкой подвеса).
20. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается отрицательно заряженное тело малых размеров.
21. Движение в вертикальной плоскости груза, подвешенного на пружине, при условии, что груз имеет отрицательный электрический заряд, а строго под точкой подвеса располагается положительно заряженное тело малых размеров.
22. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара конической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
23. Вытекание жидкости из отверстия в нижней части резервуара сферической формы, в который сверху наливается вода с постоянным объёмным расходом.
24. Движение рамки с протекающим по ней постоянным током в постоянном магнитном поле (учитывать крутильную жесткость проводов).



25. Движение поршня, закрывающего сверху газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
26. Движение поршня, закрывающего снизу разреженный газ в сосуде (процесс считать изотермическим).
27. Вращение колеса, ось которого жестко закреплена, а одна из точек обода соединена идеальной пружиной с неподвижным основанием.
28. Движение в горизонтальной плоскости груза малого размера, способного перемещаться только в радиальном направлении и соединенного пружиной с осью вращения.
29. Изменение температуры резистора, подключенного к источнику постоянного напряжения и помещенного в вакуумную колбу (учитывать потери тепла за счёт излучения).
30. Подъём воздушного шара постоянного объёма и массы с учётом переменной плотности воздуха.

### *Теоретическая справка*

Как показывает практика, лишь в очень редких случаях реальные объекты или процессы могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Как правило, такие уравнения получаются при описании либо очень простых объектов, либо в случае предельного упрощения рассматриваемых сложных объектов. Гораздо чаще в процессе математического моделирования используются нелинейные дифференциальные уравнения.

**Нелинейной** называется такая математическая модель, в которой для описания динамики изучаемого объекта, процесса или явления используются нелинейные дифференциальные уравнения. Примерами нелинейных моделей являются зависимости, описывающие кулоновское трение, зону нечувствительности (люфт), гистерезис и т. д.

Существуют различные способы классификации нелинейностей: статические и динамические, непрерывные и имеющие разрывы, стационарные и нестационарные, однозначные и неоднозначные и т. д.

**Нестационарной** называется такая математическая модель, в которой коэффициенты уравнения динамики изучаемого объекта,

процесса или явления изменяются с течением времени. В качестве примера нестационарных моделей можно привести движение тела переменной массы (полёт ракеты), процессы старения и износа конструкций, процессы разрушения материалов с течением времени и т. д.

Считается, что наиболее полно и точно объект, процесс или явление можно описать с помощью нелинейных нестационарных моделей. Однако, работа с такими моделями весьма сложна и чаще всего может проводиться только численными методами (аналитическое решение математической задачи получить, как правило, не представляется возможным). Поэтому для удобства исследования и практического использования сложные модели стараются упростить, используя процедуру линеаризации.

**Линеаризацией** называют процесс сведения нелинейного уравнения к линейному, описывающему поведение объекта в некоторой окрестности установившегося режима.

**Установившимся** называется такой режим, при котором интересующая нас выходная величина не изменяется с течением времени.

Полученные в ходе линеаризации уравнения называются линеаризованной математической моделью. Они достаточно хорошо описывают поведение изучаемого объекта, процесса или явления в окрестностях установившегося режима, но могут давать неточные или некорректные результаты при больших отклонениях от него.

Существуют различные методы линеаризации. Рассмотрим 2 метода линеаризации, наиболее широко используемых на практике.

**Первый метод линеаризации.** Если нелинейная функция, входящая в уравнение математической модели, является аналитической в некоторой области, то её можно разложить в ряд Тейлора.

Пусть, например, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

Здесь  $y$  – интересующая нас выходная величина,  $\dot{y}$  – её производная по времени,  $u$  – некоторое внешнее воздействие.

Будем полагать, что существует некоторый установившийся режим  $(u_0, y_0)$ , такой что  $f(u_0, y_0) = 0$ .

Разложим правую часть уравнения динамики в ряд Тейлора в окрестностях установившегося режима:

$$f(u, y) = f(u_0, y_0) + \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y + R_n.$$

Здесь  $\Delta u = u - u_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  – отклонения от установившегося режима,  $R_n$  – остаточный член.

Считая величину приращения малой, можно отбросить остаточный член. Кроме того, согласно принятому ранее допущению  $f(u_0, y_0) = 0$ . Тогда линеаризованное уравнение динамики можно записать следующим образом:

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = \left. \frac{df}{du} \right|_{u_0, y_0} \Delta u + \left. \frac{df}{dy} \right|_{u_0, y_0} \Delta y.$$

Таким образом, мы получили линейное дифференциальное уравнение, которое можно исследовать аналитическими методами.

Следует отметить, что в процессе линеаризации произошел переход к новой переменной – вместо абсолютного значения выходной величины мы рассматриваем закон её отклонения от установившегося значения.

**Второй метод линеаризации.** Пусть, как и в предыдущем случае, нелинейное дифференциальное уравнение динамики объекта имеет вид:

$$\dot{y} = f(u, y).$$

В исходном нелинейном уравнении заменим значения переменных величин следующими выражениями:

$$\begin{cases} y = y_0 + \Delta y ; \\ u = u_0 + \Delta u . \end{cases}$$

После этого получим:

$$\frac{d}{dt}(y_0 + \Delta y) = f(u_0 + \Delta u, y_0 + \Delta y).$$

В результате выполнения эквивалентных преобразований, в правой части уравнения динамики можно будет выделить 3 группы слагаемых: не содержащие приращение  $\Delta y$  или  $\Delta u$ , содержащие приращение  $\Delta y$  или  $\Delta u$  в виде простого множителя, содержащие некоторые степени приращения  $\Delta y$  или  $\Delta u$ . Полагая приращение малым, слагаемые третьей группы можно отбросить. При этом слагаемые первой группы будут описывать опорное движение объекта, а слагаемые второй группы – движение в отклонениях от опорной траектории.

Линеаризованная модель описывает поведение объекта лишь в малой окрестности установившегося режима (в малых отклонениях от опорной траектории). При больших отклонениях линеаризованная модель, как правило, становится неадекватной. Для корректного использования линеаризованной модели необходимо проводить оценку величины остаточного члена.

Линеаризованная модель всегда менее точна, чем нелинейная модель. Поэтому результаты, полученные для линеаризованной модели, лишь с некоторыми допущениями могут быть использованы при исследовании нелинейной модели.

### ***Пример***

Требуется провести математическое моделирование движения колеса, вращающегося вокруг своей оси в вертикальной плоскости при условии, что на его ободе жестко закреплён груз малых размеров.

Будем полагать, что масса ступиц пренебрежимо мала, а момент трения на валу пропорционален скорости вращения. Графическая иллюстрация описываемого процесса представлена на рисунке 3.1.

**Получение нелинейного уравнения динамики.** Составим для рассматриваемого колеса с грузом уравнение движения, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$(J + mR^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -M_{TP} - M_T .$$

Здесь  $J$  – момент инерции колеса без учёта груза,  $m$  – масса груза,  $R$  – радиус колеса,  $\alpha$  – угол отклонения груза от вертикали,  $M_{тр}$  – момент сил трения на оси колеса,  $M_T$  – момент силы тяжести.

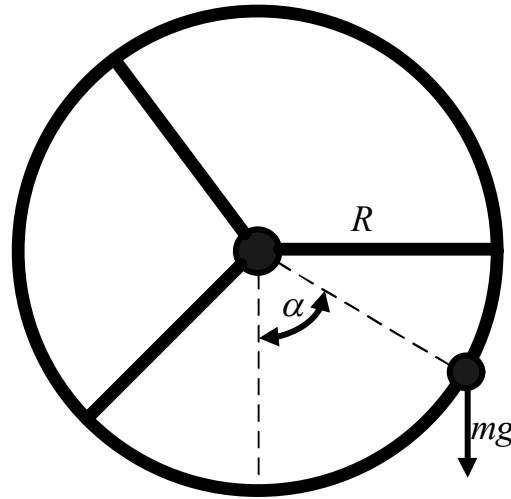


Рисунок 3.1 – Графическая иллюстрация динамического процесса

Начальные условия примут вид:

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0; \\ \dot{\alpha}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Учитывая сделанные ранее предположения, преобразуем уравнение динамики:

$$(J + mR^2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k \frac{d\alpha}{dt} - mgR \sin \alpha .$$

Здесь  $k$  – коэффициент трения.

Проведя эквивалентные преобразования, получим уравнение движения колеса:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha = 0 .$$

Несмотря на кажущуюся простоту, это нелинейное дифференциальное уравнение, решение которого может быть получено только численными методами.

**Определение установившегося режима.** Если интересующие нас параметры динамического объекта, процесса или явления не изменяются с течением времени, то говорят, что имеет место

**установившийся режим.** Чтобы найти условия установившегося режима, все производные выходной величины приравнивают к нулю.

В нашем случае примем угловую скорость и угловое ускорение равными нулю:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{mgR}{J + mR^2} \sin \alpha_0 = 0.$$

Откуда  $\alpha_0 = 0$  (формально условие выполняется и при  $\alpha_0 = 180^\circ$ , но при этом малейшее отклонение от вертикали вызовет переворот конструкции – имеет место ситуация так называемого неустойчивого равновесия).

**Линеаризация уравнения динамики.** Для получения линеаризованной модели движения колеса разложим функцию  $\sin \alpha$  в ряд Тейлора в окрестностях точки  $\alpha_0$ :

$$\sin \alpha = \Delta\alpha - \frac{(\Delta\alpha)^3}{3!} + \frac{(\Delta\alpha)^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\Delta\alpha)^{2n+1}.$$

Здесь обозначено  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ . В нашем случае, так как установившееся значение угла равно нулю,  $\Delta\alpha = \alpha$ . Но так бывает далеко не всегда.

Полагая члены ряда степени выше первой пренебрежимо малыми, получим:  $\sin \alpha \approx \Delta\alpha$ .

Тогда линеаризованное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} + \frac{k}{J + mR^2} \frac{d(\Delta\alpha)}{dt} + \frac{mgR}{J + mR^2} (\Delta\alpha) = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого может иметь различный вид в зависимости от соотношения коэффициентов. Рассмотрим все возможные варианты.

1. Если  $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J + mR^2} > 0$ , то характеристическое

уравнение имеет два различных действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  задаются выражениями:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}; \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2}}. \end{cases}$$

При заданных значениях угла отклонения  $\Delta\alpha_0$  и скорости его изменения  $\omega_0$  в начальный момент времени, можно определить константы интегрирования:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1 + C_2; \\ \omega_0 = -\lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\omega_0 + \lambda_2 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ C_2 = \frac{\omega_0 + \lambda_1 \Delta\alpha_0}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{cases}$$

2. Если  $\left(\frac{k}{J + mR^2}\right)^2 - 4 \frac{mgR}{J + mR^2} = 0$ , то характеристическое

уравнение имеет два одинаковых действительных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t}.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметр  $\lambda$  задаётся выражением:

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{k}{J + mR^2}.$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_1; \\ \omega_0 = -\lambda C_1 + C_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \Delta\alpha_0 ; \\ C_2 = \omega_0 + \lambda\Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

3. Если  $\left(\frac{k}{J+mR^2}\right)^2 - 4\frac{mgR}{J+mR^2} < 0$ , то характеристическое

уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, а общее решение дифференциального уравнения определяется выражением:

$$\Delta\alpha = e^{-\beta t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)).$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, а параметры  $\beta$  и  $\omega$  задаются выражениями:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \frac{k}{J+mR^2} ; \\ \omega = \sqrt{\frac{mgR}{J+mR^2} - \beta^2} . \end{cases}$$

Определим константы интегрирования из начальных условий:

$$\begin{cases} \Delta\alpha_0 = C_2 ; \\ \omega_0 = -\beta C_2 + \omega C_1 . \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём искомые значения:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\omega_0 + \beta\Delta\alpha_0}{\omega} ; \\ C_2 = \Delta\alpha_0 . \end{cases}$$

Найденные аналитические решения задачи в различных случаях позволяют качественно оценить динамику изучаемого процесса. Так, например, если коэффициент сопротивления относительно велик, то движение колеса с грузом будет представлять собой асимптотическое перемещение в положение равновесия. Если же коэффициент сопротивления сравнительно мал, то движение колеса с грузом будет представлять собой затухающие гармонические колебания вокруг положения равновесия. Как видно, все полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и общим физическим смыслом рассматриваемой задачи.



**Сравнительный анализ нелинейной и линеаризованной модели.** Зададим конкретные числовые значения параметров и рассмотрим поведение исходной нелинейной и линеаризованной модели при различных начальных условиях. Пусть, например,  $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $m = 2 \text{ кг}$ ;  $R = 0,5 \text{ м}$ ;  $k = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ ;  $\alpha_0 = \pi/18$ ;  $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$ .

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 0,3636\dot{\alpha} + 1,7836 \sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Сведём полученное уравнение высокого порядка к системе уравнений первого порядка, для чего введём обозначение  $\omega = \dot{\alpha}$ . Получим:

$$\begin{cases} \dot{\omega} + 0,3636\omega + 1,7836 \sin \alpha = 0; \\ \dot{\alpha} = \omega. \end{cases}$$

Заменяем производную функции конечной разностью:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(i+1) - y(i)}{h}.$$

Тогда расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(0,3636\omega(i) + 1,7836 \sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь  $h$  – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta \ddot{\alpha} + 0,3636\Delta \dot{\alpha} + 1,7836\Delta \alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. Так как корни характеристического уравнения в этом случае будут комплексно-сопряженными, то общее решение будет иметь вид:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (C_1 \sin(1,3231t) + C_2 \cos(1,3231t)).$$

Учитывая заданные начальные условия, получим расчётную формулу:

$$\Delta \alpha = e^{-0,1818t} (0,0240 \sin(1,3231t) + 0,1745 \cos(1,3231t)).$$

Графики аналитического и численного решений при  $h = 0,01$  представлены на рисунке 3.2. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения.

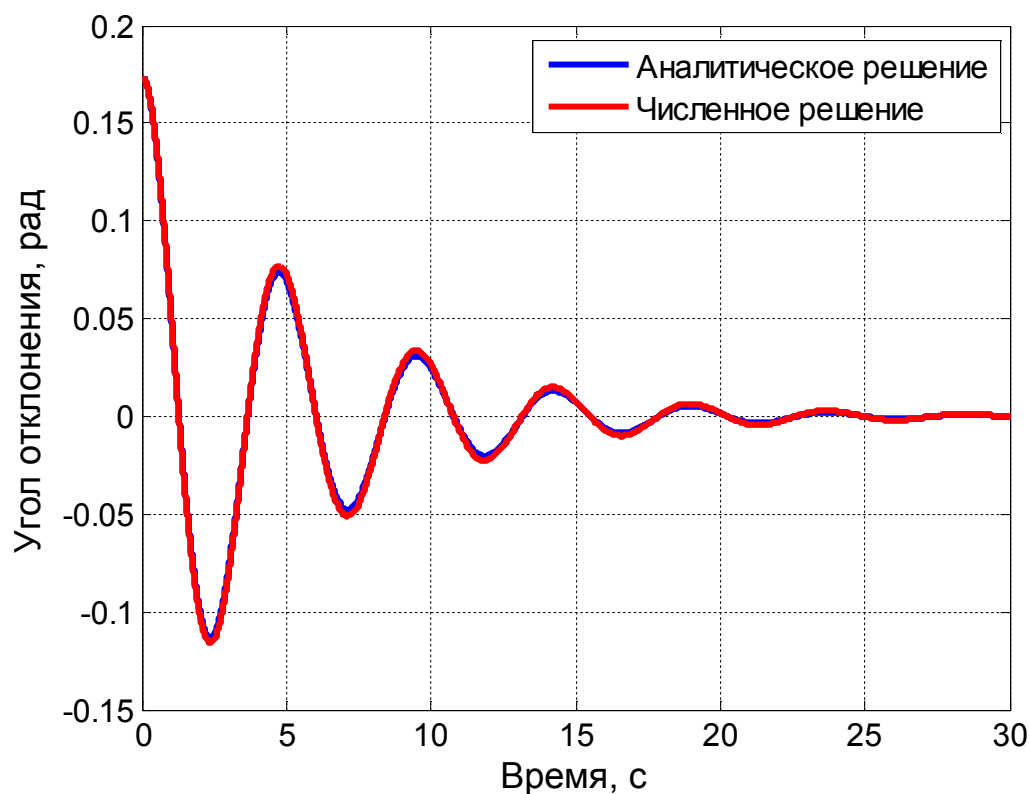


Рисунок 3.2 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = \pi/18$

Рассмотрим тот же процесс при иных начальных условиях:  $\alpha_0 = \pi/2$ ;  $\omega_0 = 0$  рад/с. Прделав аналогичные операции, определим зависимость угла отклонения груза от вертикали. Графики аналитического и численного решений представлены на рисунке 3.3. Видно, что они отличаются друг от друга, но это отклонение сравнительно мало.

На рисунке 3.4 представлены графики аналитического и численного решений задачи при начальных условиях  $\alpha_0 = 5\pi/6$ ;  $\omega_0 = 0$  рад/с. Видно, что графики аналитического и численного решения весьма существенно отличаются, т. е. линеаризованная модель описывает динамику процесса с большими погрешностями.

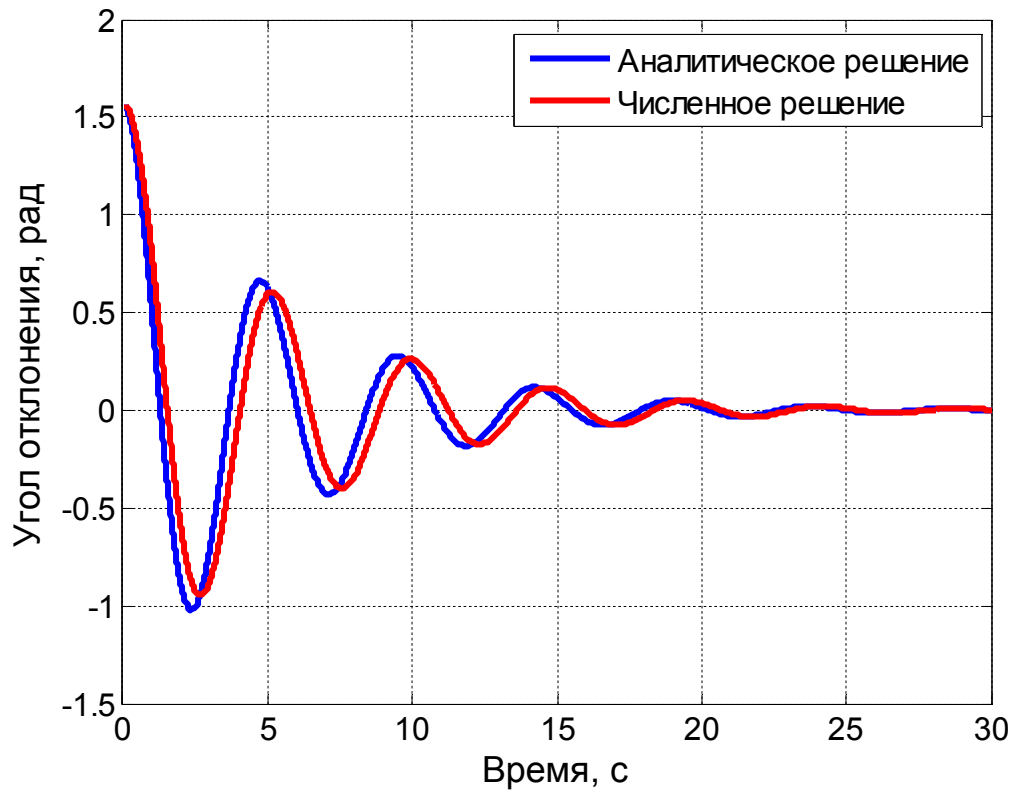


Рисунок 3.3 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = \pi/2$

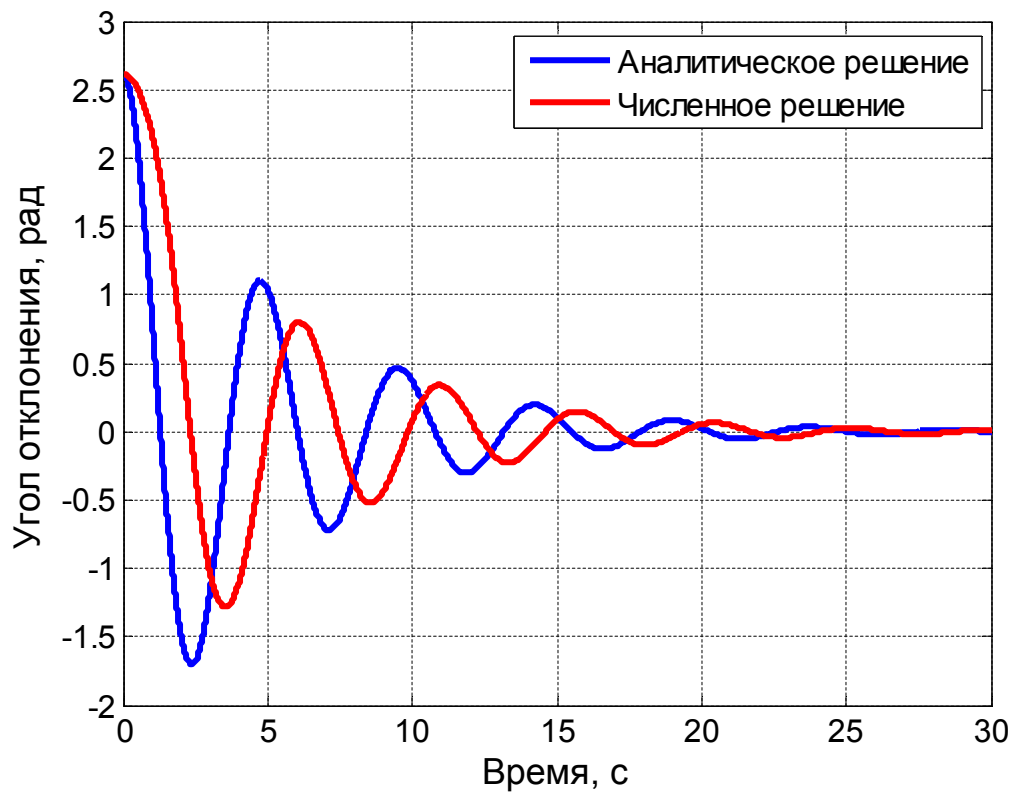


Рисунок 3.4 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = 5\pi/6$

Рассмотрим динамику изучаемого процесса при иных значениях параметров. Например, если  $J = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $m = 2 \text{ кг}$ ;  $R = 0,5 \text{ м}$ ;  $k = 15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ ;  $\alpha_0 = \pi/18$ ;  $\omega_0 = 0 \text{ рад/с}$  (т. е. трение на оси колеса является весьма значительным).

В этом случае нелинейное уравнение динамики будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha} + 2,7273\dot{\alpha} + 1,7836\sin \alpha = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения может быть получено только численными методами. Расчётные формулы численного решения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \omega(i+1) = \omega(i) - h(2,7273\omega(i) + 1,7836\sin \alpha(i)); & \omega(0) = 0; \\ \alpha(i+1) = \alpha(i) + h\omega(i); & \alpha(0) = \pi/18. \end{cases}$$

Здесь  $h$  – шаг интегрирования.

Линеаризованное уравнение динамики запишется следующим образом:

$$\Delta\ddot{\alpha} + 2,7273\Delta\dot{\alpha} + 1,7836\Delta\alpha = 0.$$

Его аналитическое решение может быть легко найдено по известным формулам. С учётом заданных начальных условий, получим зависимость угла отклонения от времени:

$$\Delta\alpha = -0,3448e^{-1,6391t} + 0,5193e^{-1,0882t}.$$

Графики аналитического и численного решений при  $h = 0,01$  представлены на рисунке 3.5. Видно, что они практически совпадают, т. е. аналитическое решение линеаризованного уравнения почти не отличается от численного решения нелинейного уравнения. На рисунках 3.6 и 3.7 представлены зависимости угла отклонения груза от времени при иных начальных условиях.

Как и в предыдущем случае, при увеличении амплитуды поведение линейной и нелинейной модели начинают всё больше и больше отличаться друг от друга.

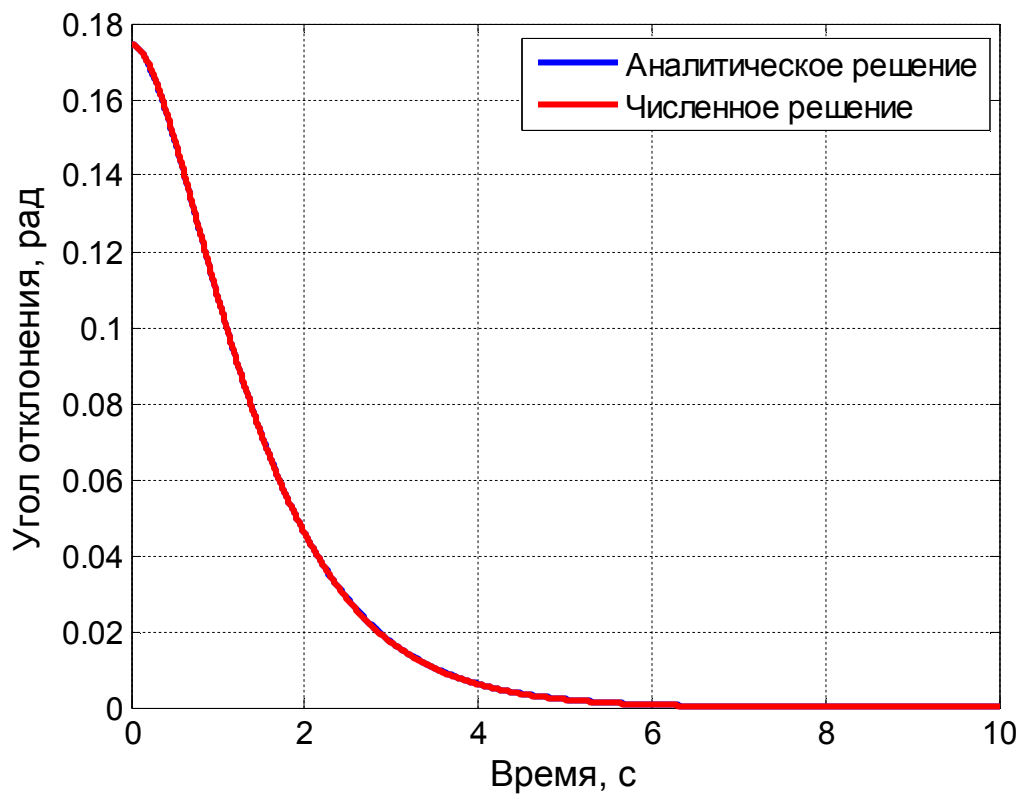


Рисунок 3.5 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = \pi/18$

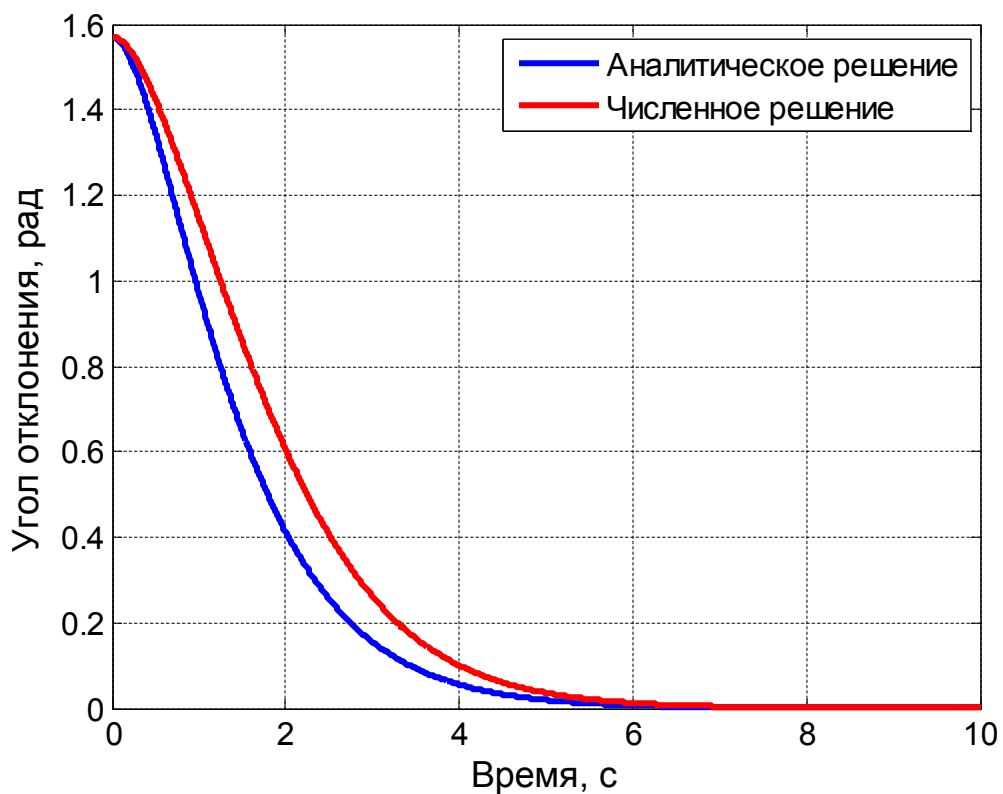


Рисунок 3.6 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = \pi/2$

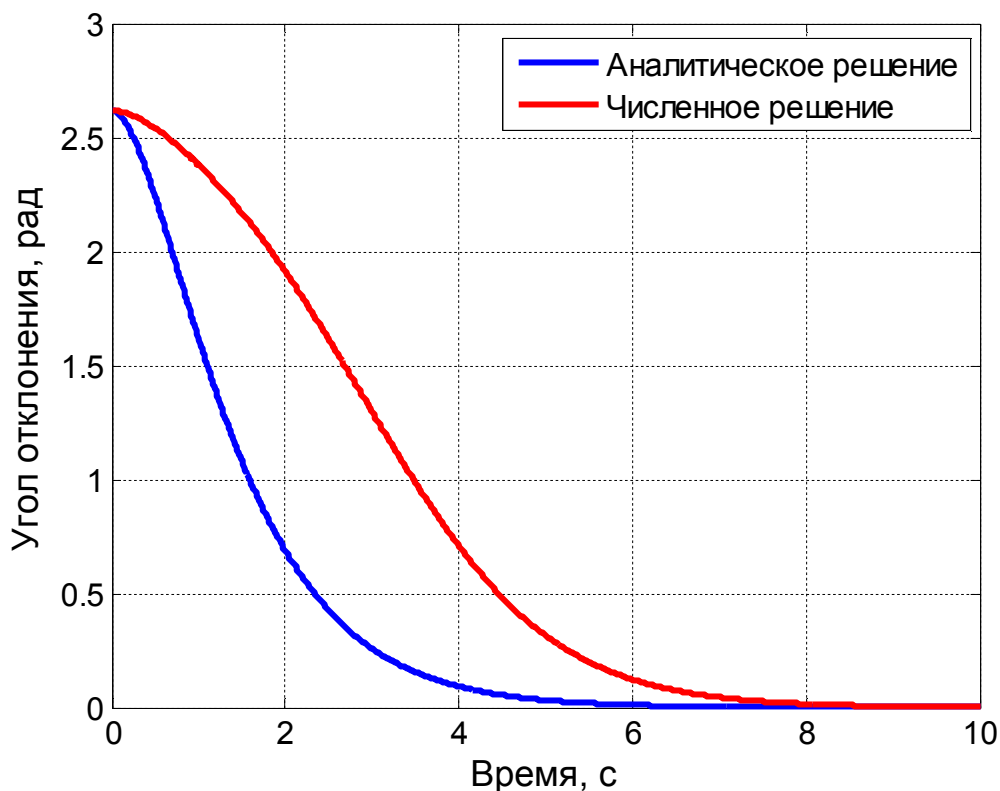


Рисунок 3.7 – Угол отклонения груза от вертикали при  $\alpha_0 = 5\pi/6$

Таким образом, была построена нелинейная модель динамического процесса и проведена его линеаризация. Линеаризованная модель более удобна для изучения и практического использования, чем нелинейная, так как позволяет находить аналитическое решение задачи. Однако, линеаризованная модель хорошо описывает поведение динамического объекта только лишь в малой окрестности установившегося режима – и чем больше величина отклонения, тем больше отличаются друг от друга линейная и нелинейная модель.

### ***Контрольные вопросы***

1. Какие математические модели называются нелинейными?
2. Какие математические модели называются нестационарными?
3. В чем состоит суть процедуры линеаризации?
4. Что называется установившимся режимом?
5. Опишите основные способы линеаризации нелинейных уравнений динамики.

## Список источников

1. Асанов А. З. Математические модели динамических систем. Казань: изд-во Казан. гос. ун-та, 2007. 204 с.
2. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2005. 440 с.
3. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов. СПб.: Лань, 2013. 192 с.
4. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Серия «Библиотека профессионала». М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.
5. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
6. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Минск: Новое знание, 2013. 584 с.

## Оглавление

Введение.....	4
Лабораторная работа № 1. Разработка и исследование поэлементной математической модели динамической системы.....	5
Лабораторная работа № 2. Разработка и исследование модели динамической системы в пространстве состояний .....	11
Лабораторная работа № 3. Разработка и исследование вход- выходного описания динамической системы.....	21
Лабораторная работа № 4. Разработка и исследование математической модели динамической системы с использованием интегрального преобразования Лапласа .....	33
Список источников.....	48
Приложение 1 .....	49
Приложение 2 .....	59
Приложение 3 .....	60



## Введение

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для студентов, стремящихся закрепить теоретические знания и овладеть практическими навыками построения и исследования математических моделей динамических систем. В пособии рассмотрены различные способы математического описания структуры и законов функционирования динамических систем: поэлементное описание, вход-выходное описание, модель в пространстве состояний. Описаны принципы построения математических моделей динамических систем, способы перехода от одной формы описания к другой, а также методы использования различных форм представления моделей для изучения протекающих в системе процессов.

Пособие разбито на 4 раздела, в каждом из которых рассматривается та или иная форма математического описания динамической системы, приводится краткая теоретическая справка, разбирается методический пример, а также даются варианты заданий для самостоятельного выполнения.

# **Лабораторная работа № 1.**

## **Разработка и исследование поэлементной математической модели динамической системы**

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при создании поэлементной математической модели процессов, происходящих в электрической системе.

**Задание:** разработать поэлементную математическую модель динамической системы согласно индивидуальному варианту.

### ***Этапы работы:***

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Изучить электрическую схему заданного устройства.
3. Составить компонентные уравнения.
4. Составить топологические уравнения.
5. Составить поэлементную математическую модель.
6. Оценить разрешимость полученной системы уравнений.
7. Оформить отчет по лабораторной работе.

### ***Отчет о работе должен содержать:***

1. Электрическую схему исследуемого устройства.
2. Компонентные уравнения.
3. Топологические уравнения.
4. Поэлементную математическую модель динамической системы.
5. Обоснованное заключение о разрешимости полученной системы уравнений.
6. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### ***Варианты заданий***

Электрические схемы исследуемых устройств представлены в приложении. Номер варианта задаётся преподавателем.

### ***Теоретическая справка***

**Динамическая система** – это система, изменяющая своё состояние с течением времени под влиянием внешних воздействий.

**Математическая модель динамической системы** – совокупность математических уравнений, формул, соотношений, описывающая исследуемые процессы в системе.

Математическое описание динамических систем и их элементов различной физической природы может быть выражено в различных формах (например, дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения).

Существуют два основных подхода к построению математических моделей: экспериментальный (эмпирический) и теоретический (аналитический). Суть первого подхода заключается в обработке и анализе известных реакций системы на входные воздействия. При втором подходе модель строится путём анализа математической записи физических законов, описывающих поведение и взаимосвязи элементов системы.

В данной работе рассматривается аналитический подход к построению математических моделей. При таком подходе систему

- 1) разделяют на элементы и составляют уравнения, описывающие поведение (движение) каждого из этих элементов;
- 2) с помощью специальных уравнений устанавливают связи между элементами.

Уравнения, описывающие поведение отдельных элементов системы, называются **компонентными**. Компонентные уравнения составляются на основании анализа физических, химических и иных процессов, происходящих в элементах системы, и применения фундаментальных законов сохранения энергии и вещества, конкретизированных для различных отраслей естествознания (законы механики, электротехники, оптики и т.д.). Например, компонентными уравнениями (уравнениями элементов) в электротехнике являются уравнения связывающие ток и напряжение электротехнического элемента:  $U = RI$  для активного сопротивления;  $I_c = C \frac{dU_c}{dt}$  для

электрической ёмкости;  $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$  для индуктивности и т.д.

Связи между элементами в системе описываются с помощью так называемых **топологических уравнений** (уравнений связи), описывающих взаимосвязь между собой переменными, принадлежащими различным элементам. Примерами топологических уравнений для электрических схем являются первый и второй законы Кирхгофа, конкретная запись которых для каждой электрической схемы строго индивидуальна и зависит от самой схемы соединения (топологии) электрических элементов друг с другом.

Совокупность уравнений элементов и уравнений связи носит название **поэлементной математической модели объекта**.

### **Пример**

Требуется построить математическую модель динамической системы, электрическая схема которой приведена на рисунке 1.1.

Воспользуемся законом Ома для участка цепи, записав компонентные уравнения для каждого элемента заданной электрической схемы:

$$(1.1) \quad \begin{cases} U_{R1} = i_{R1}R_1; & U_{R2} = i_{R2}R_2; & U_{R3} = i_{R3}R_3; \\ i_{C1} = C_1 \frac{dU_{C1}}{dt}; & i_{C2} = C_2 \frac{dU_{C2}}{dt}; & U_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}. \end{cases}$$

Топологические уравнения для заданной электрической схемы можно получить, воспользовавшись законами Кирхгофа.

*Первый закон Кирхгофа:* сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из узла.

*Второй закон Кирхгофа:* алгебраическая сумма падений напряжений по замкнутому контуру равна сумме ЭДС в этом контуре.

Согласно первому закону Кирхгофа:

$$(1.2) \quad \begin{cases} i_{R2} = i_{C1} + i_{R1}; \\ i_{L1} = i_{C2} + i_{C1} + i_{R1}; \\ i_{L1} = i_{C2} + i_{R2}; \\ i_{L1} = i_{R3}. \end{cases}$$

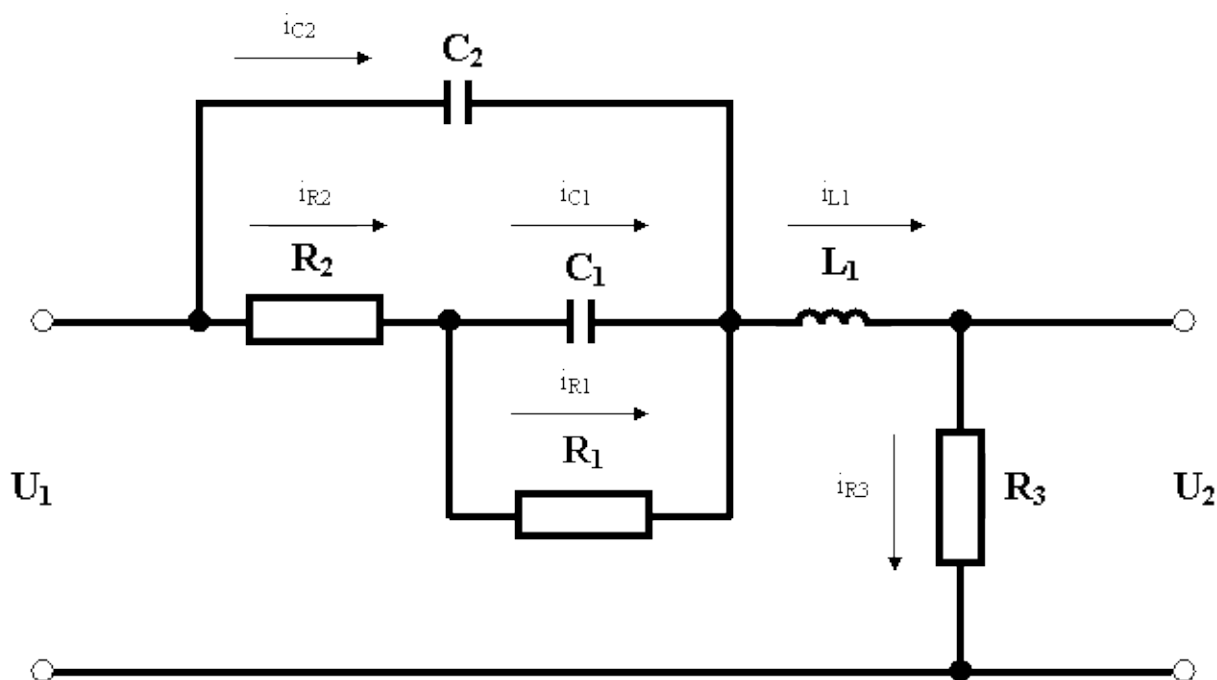


Рисунок 1.1 – Схема исследуемой электрической цепи

Согласно второму закону Кирхгофа:

$$(1.3) \begin{cases} U_{R2} + U_{R1} + U_{L1} + U_{R3} = U_1; \\ U_{C2} - U_{C1} - U_{R2} = 0; \\ U_{C1} - U_{R1} = 0; \\ U_{C2} + U_{L1} + U_{R3} = U_1; \\ U_{R2} + U_{C1} + U_{L1} + U_{R3} = U_1; \\ U_{C2} - U_{R1} - U_{R2} = 0. \end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что  $U_{R3} = U_2$ .

Следует оговориться, что не все уравнения, полученные с помощью законов Кирхгофа и записанные здесь, являются независимыми. Если  $b$  – число ветвей в электрической цепи,  $b_{um}$  – число ветвей с источником тока,  $y$  – число узлов в электрической цепи, то  $(b - b_{um})$  – число неизвестных токов,  $(y - 1)$  – число независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа,  $(b - b_{um}) - (y - 1)$  – число независимых уравнений по 2-му закону Кирхгофа.

В нашем примере  $b = 6$ ,  $b_{um} = 0$ ,  $y = 4$ , поэтому в системе (1.2) присутствуют 3 независимых уравнения (третье уравнение является

линейной комбинацией двух других), а в системе (1.3) – 3 независимых уравнения.

Дополнив компонентные уравнения (1.1) независимыми уравнениями из (1.2) и (1.3), получим поэлементную математическую модель (поэлементное описание) динамической системы:

$$(1.4) \begin{cases} i_{R1}R_1 - U_{R1} = 0; & i_{R2}R_2 - U_{R2} = 0; & i_{R3}R_3 - U_{R3} = 0; \\ C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} - i_{C1} = 0; & C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} - i_{C2} = 0; & L_1 \frac{di_{L1}}{dt} - U_{L1} = 0; \\ i_{C1} + i_{R1} - i_{R2} = 0; & i_{C2} + i_{C1} + i_{R1} - i_{L1} = 0; & i_{L1} - i_{R3} = 0; \\ U_{R2} + U_{R1} + U_{L1} + U_{R3} = U_1; \\ U_{C2} - U_{C1} - U_{R2} = 0; \\ U_{C1} - U_{R1} = 0. \end{cases}$$

Проанализируем принципиальную разрешимость полученной системы. Мы имеем одно входное воздействие – напряжение  $U_1$  и 12 переменных, описывающих состояние элементов рассматриваемой системы (для каждого из 6 элементов рассматриваемой системы его состояние однозначно характеризуется значениями тока и напряжения).

Обозначим операцию дифференцирования линейным оператором  $p$ . Тогда система (1.4) может быть записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & pC_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pL_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{R1} \\ U_{R2} \\ U_{R3} \\ U_{C1} \\ U_{C2} \\ U_{L1} \\ i_{R1} \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{C1} \\ i_{C2} \\ i_{L1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов из левой части полученного уравнения. Получим:

$$\Delta = p^3 L_1 C_1 C_2 R_1 R_2 + p^2 (L_1 (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + C_1 C_2 R_1 R_2 R_3) + p (L_1 + C_2 R_2 R_3 + C_2 R_1 R_3 + C_1 R_1 R_2 + C_1 R_1 R_3) + R_1 + R_2 + R_3 .$$

Этот определитель не равен нулю. Следовательно, рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение.

Таким образом, полученная поэлементная математическая модель динамической системы может быть использована для решения практических задач.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое динамическая система?
2. Что называется математической моделью динамической системы?
3. Какие основные подходы к построению математической модели динамической системы существуют?
4. Какой общий принцип построения математических моделей динамических систем при теоретическом подходе?
5. Что называют компонентными уравнениями? Каков их физический смысл?
6. Что называют топологическими уравнениями? Каков их физический смысл?
7. Что называют поэлементной математической моделью?

## **Лабораторная работа № 2.**

### **Разработка и исследование модели динамической системы в пространстве состояний**

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при исследовании математических моделей процессов различной природы.

**Задача:** провести исследование математической модели заданного процесса.

#### ***Этапы работы:***

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Для заданной электрической схемы выбрать переменные, однозначно характеризующие состояние динамической системы.
3. Сформировать математическую модель исследуемого объекта в пространстве выбранных переменных, используя полученное в лабораторной работе № 1 поэлементное описание.
4. Определить числовые матрицы коэффициентов модели в пространстве состояний при заданных значениях параметров элементов.
5. Определить реакцию динамической системы на единичный ступенчатый входной сигнал при нулевых начальных условиях.
6. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### ***Отчет о работе должен содержать:***

1. Электрическую схему исследуемого устройства.
2. Поэлементную математическую модель динамической системы.
3. Обоснованный выбор переменных состояния динамической системы.
4. Модель динамической системы в пространстве состояний.
5. Числовые матрицы коэффициентов модели в пространстве состояний при заданных значениях параметров элементов.
6. График реакции динамической системы на единичный ступенчатый входной сигнал при нулевых начальных условиях.



## 7. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### **Варианты заданий**

Совпадают с тем, что были заданы при выполнении лабораторной работы № 1.

Параметры элементов электрической схемы задаются преподавателем.

### **Теоретическая справка**

Для любой динамической системы можно определить некоторую совокупность переменных  $x_i(t)$ , которая в полной мере характеризует состояние системы в каждый момент времени. Такие переменные носят название **переменных состояния** динамической системы.

Пространство (область) возможных значений переменных состояния называется **пространством состояний** динамической системы. Количество независимых переменных  $x_i(t)$ , характеризующих состояние системы, определяет размерность пространства состояний.

Формально состояние динамической системы можно представить в виде вектора  $X(t)$  в пространстве состояний, а переменные состояния  $x_i(t)$  – как проекции этого вектора на координатные оси пространства.

Известно, что любая линейная стационарная динамическая система может быть описана в пространстве состояний обобщенными уравнениями вида:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \\ Y(t) = CX(t) + DU(t); \end{cases}$$

где  $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  – вектор переменных состояний,  
 $U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$  – вектор входных воздействий,  
 $Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)]^T$  – вектор выходных сигналов;  
 $A_{nm}$ ,  $B_{nr}$ ,  $C_{kn}$ ,  $D_{kr}$  – постоянные матрицы указанных размерностей.  
Элементы матриц определяются структурой и параметрами конкретной динамической системы.

Первое уравнение из (2.1) называется **уравнением состояния** системы и описывает состояние системы во времени. Второе уравнение из (2.1) называется **выходным уравнением** системы и описывает правило формирования выходного сигнала системы.

Можно найти множество совокупностей переменных, которые способны описывать состояние динамической системы. Т. е. для одной и той же системы можно составить несколько систем уравнений вида (2.1), отличающиеся природой переменных, выбранных в качестве переменных состояния. Различный выбор этих переменных приводит к различным по своему элементному составу матрицам  $A, B, C, D$ .

Общими условиями, которыми следует руководствоваться при выборе переменных состояния, являются:

- достаточность переменных состояния для описания различных состояний и режимов системы;
- минимальность состава переменных состояния, их избыточность;
- непосредственная измеримость большинства переменных состояния;
- в качестве переменных состояния целесообразно использовать те обобщенные переменные системы, для которых выполняются законы сохранения. Этим обеспечивается непрерывность переменных состояния, простота уравнений.

Таким образом, за координаты вектора состояний целесообразно использовать значения выходных сигналов динамических элементов, обладающих физическим свойством накапливать кинетическую, потенциальную, электрическую и другую энергию.

Так, для описания механических систем в качестве переменных состояния рекомендуется использовать линейное перемещение, скорость перемещения, угол поворота вала, угловую скорость поворота вала и т.д., а для составления уравнений состояния – законы Ньютона.

Для описания электрических систем в качестве переменных состояния целесообразно использовать напряжение на конденсаторах

$U_C(t)$  и токи  $i_L(t)$  через катушки индуктивности, так как эти величины связаны с энергией электромагнитного поля, а для составления уравнений состояния следует воспользоваться законами Ома и Кирхгофа для мгновенных значений указанных величин.

Особенности выбора переменных состояния и составления уравнений состояния для электромеханических систем проистекают из того факта, что в таких системах существуют и взаимодействуют как механические элементы, так и электрические цепи. Поэтому необходим учёт особенностей как той, так и другой частей электромеханической системы, при этом рекомендации, изложенные выше, сохраняют свою силу.

Любое звено динамической системы может быть описано с помощью одного дифференциального уравнения. Это уравнение составляется на базе тех фундаментальных физических законов, которые лежат в основе процессов происходящих в звене системы. Как правило, это уравнение описывает изменение выходного сигнала звена в зависимости от сигнала на входе рассматриваемого динамического звена и чаще всего представляет собой дифференциальное уравнение 1-го порядка.

Совокупность дифференциальных уравнений элементов динамической системы, приведенные к нормальной форме Коши, образуют матричное дифференциальное уравнение состояния.

### ***Пример***

Требуется построить математическую модель динамической системы в пространстве состояний для устройства, электрическая схема которого приведена на рисунке 1.1.

Рассматриваемая схема имеет в своем составе три реактивных элемента, способных накапливать энергию электромагнитного поля. Каждый реактивный элемент описывается компонентным уравнением, являющимся дифференциальным уравнением 1-го порядка. Значит, для описания рассматриваемой электрической схемы в пространстве состояния требуется 3 независимых переменных.

В качестве переменных состояния системы выбираем напряжения на конденсаторах и ток, проходящий через катушку:

$$x_1 = U_{C1}, \quad x_2 = U_{C2}, \quad x_3 = i_{L1}.$$

Приведём полученную ранее поэлементную модель динамической системы к нормальной форме Коши, избавившись от вспомогательных переменных (всех, не являющихся переменными состояния или выходными сигналами).

С учётом сделанной замены система (1.4) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{cases} i_{R1}R_1 - U_{R1} = 0; & i_{R2}R_2 - U_{R2} = 0; & i_{R3}R_3 - U_{R3} = 0; \\ C_1 \frac{dx_1}{dt} - i_{C1} = 0; & C_2 \frac{dx_2}{dt} - i_{C2} = 0; & L_1 \frac{dx_3}{dt} - U_{L1} = 0; \\ i_{C1} + i_{R1} - i_{R2} = 0; & i_{C2} + i_{C1} + i_{R1} - x_3 = 0; & x_3 - i_{R3} = 0; \\ U_{R2} + U_{R1} + U_{L1} + U_{R3} = U_1; \\ x_2 - x_1 - U_{R2} = 0; \\ x_1 - U_{R1} = 0. \end{cases}$$

Выразим через переменные состояния величины  $U_{R1}$ ,  $U_{R2}$ ,  $i_{R3}$  и подставим их в оставшиеся уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} i_{R1}R_1 - x_1 = 0; & i_{R2}R_2 - x_2 + x_1 = 0; & x_3R_3 - U_{R3} = 0; \\ C_1 \frac{dx_1}{dt} - i_{C1} = 0; & C_2 \frac{dx_2}{dt} - i_{C2} = 0; & L_1 \frac{dx_3}{dt} - U_{L1} = 0; \\ i_{C1} + i_{R1} - i_{R2} = 0; & i_{C2} + i_{C1} + i_{R1} - x_3 = 0; \\ x_2 + U_{L1} + U_{R3} = U_1. \end{cases}$$

Проведём аналогичную операцию для  $i_{R1}$ ,  $i_{R2}$ ,  $U_{R3}$ . Получим:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1}{dt} - i_{C1} = 0; & C_2 \frac{dx_2}{dt} - i_{C2} = 0; & L_1 \frac{dx_3}{dt} - U_{L1} = 0; \\ i_{C1} + \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2 - x_1}{R_2} = 0; & i_{C2} + i_{C1} + \frac{x_1}{R_1} - x_3 = 0; \\ x_2 + U_{L1} + \frac{x_3}{R_3} = U_1. \end{cases}$$

На последнем этапе избавимся от переменных  $i_{C1}$ ,  $i_{C2}$ ,  $U_{L1}$ . В результате останется система из трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2 - x_1}{R_2} - \frac{x_1}{R_1}; \\ C_2 \frac{dx_2}{dt} = x_3 - \frac{x_2 - x_1}{R_2}; \\ L_1 \frac{dx_3}{dt} = U_1 - x_2 - \frac{x_3}{R_3}. \end{cases}$$

Представим полученную систему в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} x_1 + \frac{1}{R_2 C_1} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{L_1} x_2 - \frac{R_3}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} U_1. \end{cases}$$

Выходное напряжение определяется соотношением:  $U_2 = x_3 R_3$ .

Тогда система уравнений (2.1) модели в пространстве состояний будет иметь вид:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} U_1; \\ U_2 = (0 \quad 0 \quad R_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0) U_1. \end{cases}$$

Здесь в обозначениях уравнений (2.1) имеем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix},$$

$$C = (0 \ 0 \ R_3), \quad D = (0).$$

Полученная модель в пространстве состояний является не единственной. Можно построить и другие модели, выбрав иную совокупность переменных состояния.

Следует отметить, что вне зависимости от выбора переменных состояния размерность пространства состояний будет одинакова, так как она определяет фундаментальные свойства системы и является инвариантной величиной.

Чтобы получить конкретные числовые значения коэффициентов модели в пространстве состояний, следует указать конкретные числовые значения параметров электрической схемы. Пусть, например:

$$\begin{cases} L_1 = 0,1 \text{ Гн}; \\ C_1 = 0,001 \text{ Ф}; \\ C_2 = 0,002 \text{ Ф}; \\ R_1 = 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = 20 \text{ Ом}; \\ R_3 = 40 \text{ Ом}. \end{cases}$$

Тогда система (2.2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 & 50 & 0 \\ 25 & -25 & 500 \\ 0 & -10 & -400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} U_1; \\ U_2 = (0 \ 0 \ 40) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (0) U_1. \end{cases}$$

Полученная модель может быть использована для исследования рассматриваемой динамической системы. Например, задав в качестве начальных условий ток, проходящий через катушку, и напряжения на конденсаторах в начальный момент времени, мы получим классическую задачу Коши, которая может быть легко решена любым численным методом.

Для примера определим реакцию рассматриваемой системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях.

$$U_1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Решим полученную систему дифференциальных уравнений любым из известных численных методов. Например, при использовании метода Эйлера расчётные формулы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(i+1) = x_1(i) + h(-150x_1(i) + 50x_2(i)); \\ x_2(i+1) = x_2(i) + h(25x_1(i) - 25x_2(i) + 500x_3(i)); \\ x_3(i+1) = x_3(i) + h(-10x_2(i) - 400x_3(i) + 10). \end{cases}$$

Выходная величина будет определяться следующим выражением:

$$U_2(i) = 40x_3(i).$$

Графики, показывающие зависимость от времени переменных состояния динамической системы, приведены на рисунке 2.1; график выходной величины  $U_2$  – на рисунке 2.2. Необходимо отметить, что рассматриваемый процесс протекает достаточно быстро, поэтому шаг интегрирования был выбран очень маленьким:  $h = 0,001$ .

Аналогичным образом можно рассчитывать реакцию динамической системы и на другие внешние воздействия при ненулевых начальных условиях. Расчётная модель будет той же самой, изменится лишь вид функции  $U_1(t)$  и величины  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $x_3(0)$ .

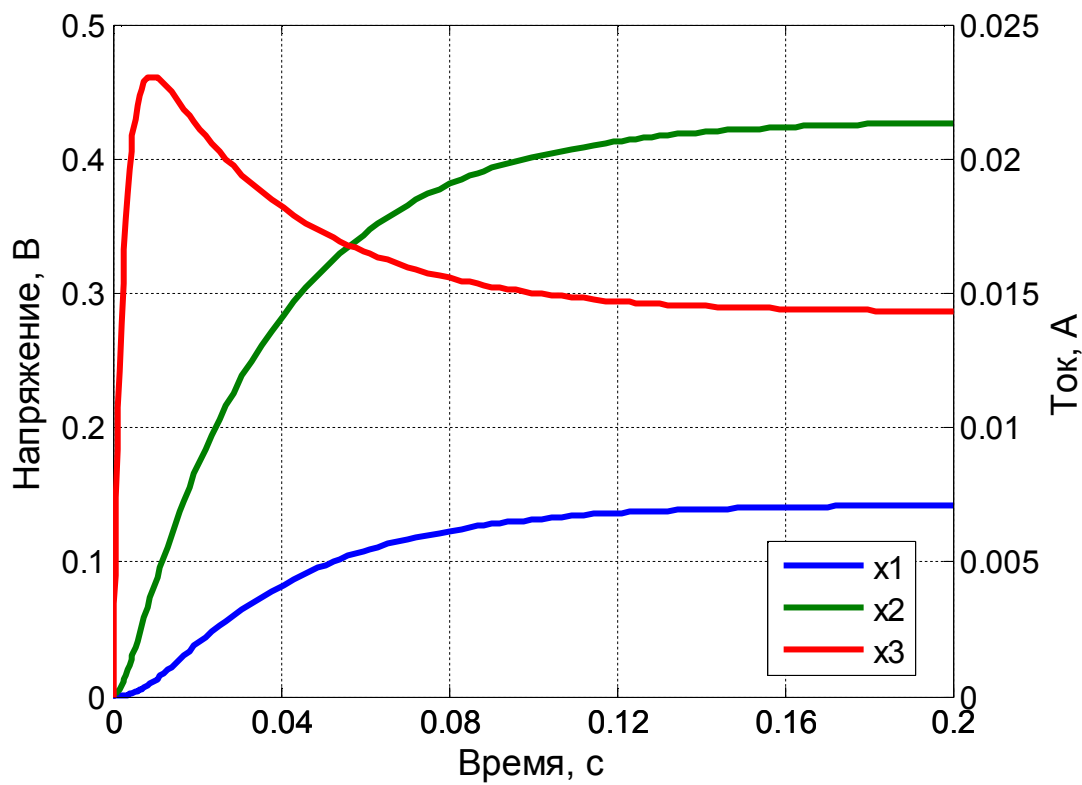


Рисунок 2.1 – Графики переменных состояния

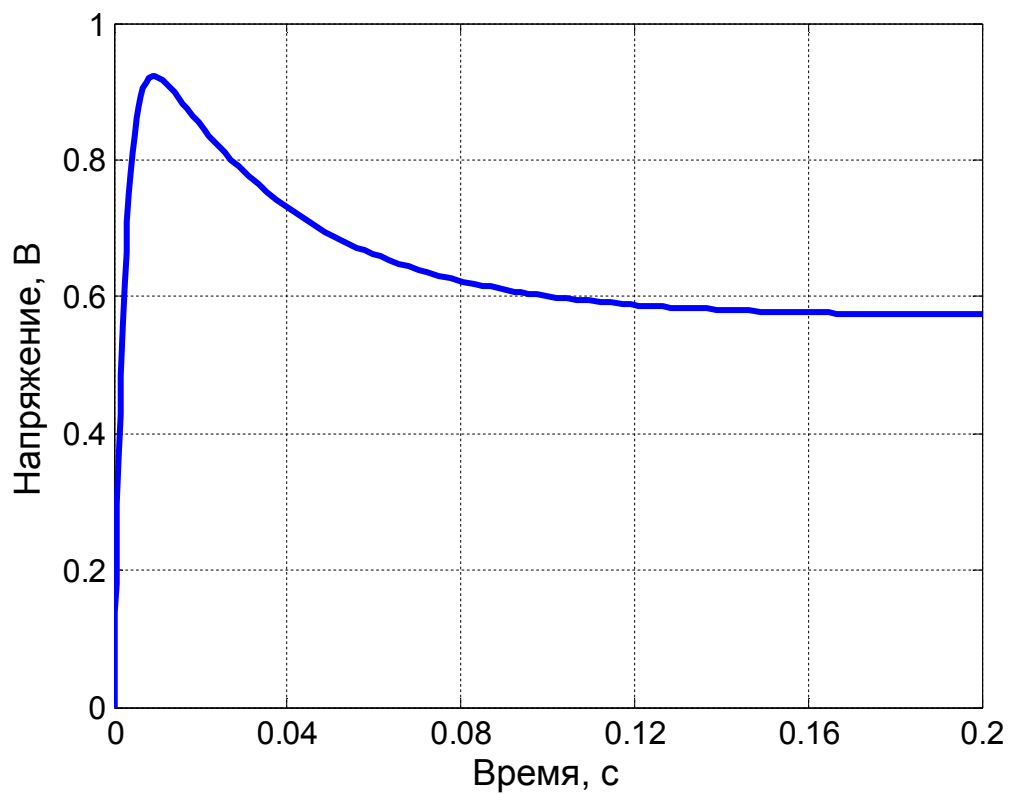


Рисунок 2.2 – График выходного сигнала



### ***Контрольные вопросы***

1. Что называют переменными состояния?
2. Что называют пространством состояний?
3. Каковы общие принципы выбора переменных состояния?
4. Какие величины рекомендуется использоваться в качестве переменных состояния и почему?
5. Каким способом может быть получена модель динамической системы в пространстве состояний?

## **Лабораторная работа № 3.**

### **Разработка и исследование вход-выходного описания динамической системы**

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при создании математической модели процессов, происходящих в электрических устройствах, в форме вход-выходного описания.

**Задача:** разработать математическую модель электрического устройства в форме дифференциального уравнения.

#### ***Этапы работы:***

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Получить математическую модель, связывающую входной и выходной сигналы, используя модель системы в пространстве состояний из лабораторной работы № 2.
3. Определить установившееся значение выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого сигнала.
4. Определить коэффициенты полученного в п. 2 дифференциального уравнения при заданных значениях параметров элементов.
5. Найти реакцию динамической системы на единичный ступенчатый входной сигнал при нулевых начальных условиях.
6. Оформить отчёт по лабораторной работе.

#### ***Отчет о работе должен содержать:***

1. Электрическую схему исследуемого устройства.
2. Модель динамической системы в пространстве состояний.
3. Установившееся значение выходного сигнала при подаче на вход единичного ступенчатого сигнала.
4. Числовые коэффициенты дифференциального уравнения при заданных значениях параметров элементов.
5. График реакции динамической системы на единичный ступенчатый входной сигнал при нулевых начальных условиях.
6. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### **Варианты заданий**

Совпадают с тем, что были заданы при выполнении лабораторной работы № 1.

Параметры элементов электрической схемы задаются преподавателем.

### **Теоретическая справка**

Очень часто непрерывную динамическую систему описывают дифференциальным уравнением относительно её выхода (выходного сигнала, выходной переменной)  $y(t)$  и входа (входного сигнала, входной переменной)  $u(t)$ . Это и есть так называемое **вход-выходное описание**, для которого характерно то, что в модели исключены все промежуточные переменные, рассматриваются только входная и выходная переменные и их производные различного порядка. В общем случае уравнение может иметь вид:

$$(3.1) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u,$$

где  $y = y(t)$  – выходная переменная;  $u = u(t)$  – входная переменная;  $a_i, b_j$  – постоянные коэффициенты,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ .

Получение математической модели динамической системы в виде (3.1) является в общем случае непростой задачей. Как уже отмечалось, гораздо проще получить совокупность уравнений, состоящую из компонентных и топологических уравнений, т.е. построить поэлементную модель, а затем с помощью математических преобразований, исключая промежуточные переменные, привести модель к вход-выходной форме описания.

Приведение к вход-выходной модели произвольной системы уравнений (как правило, дифференциальных) может осуществляться различными способами. В частности, достаточно широко используется операторный метод.

Примем, что оператор  $p$  обозначает операцию дифференцирования и определяется как

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \text{т.е.} \quad p[V(t)] = \frac{d}{dt} V(t).$$



### Пример

Требуется определить вход-выходное описание для устройства, электрическая схема которого приведена на рисунке 1.1.

Рассмотрим полученную ранее модель динамической системы в пространстве состояний (2.2).

Выходное напряжение определяется соотношением:  $U_2 = x_3 R_3$ . Следовательно, для получения вход-выходного описания требуется установить зависимость между переменной  $x_3$  и входным сигналом  $U_1$ .

Уравнения динамики записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} x_1 + \frac{1}{R_2 C_1} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{C_2} x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{L_1} x_2 - \frac{R_3}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} U_1. \end{cases}$$

Осуществив замену  $p = d/dt$ , перепишем получившиеся уравнения в виде (3.2):

$$\begin{cases} \left( p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} \right) x_1 - \frac{1}{R_2 C_1} x_2 = 0; \\ -\frac{1}{R_2 C_2} x_1 + \left( p + \frac{1}{R_2 C_2} \right) x_2 - \frac{1}{C_2} x_3 = 0; \\ \frac{1}{L_1} x_2 + \left( p + \frac{R_3}{L_1} \right) x_3 = \frac{U_1}{L_1}. \end{cases}$$

Найдём дифференциальные операторы по формуле (3.4):

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & p + \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & p + \frac{R_3}{L_1} \end{vmatrix} = \left( p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} \right) \frac{1}{C_2} \frac{1}{L_1} -$$

$$\begin{aligned}
& -\left(p + \frac{R_3}{L_1}\right) \frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{R_2 C_1} + \left(p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2}\right) \left(p + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \left(p + \frac{R_3}{L_1}\right) = \\
& = p^3 + p^2 \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1} \right) + \\
& + p \left( \frac{1}{L_1 C_2} + \frac{R_3}{L_1} \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \right) + \\
& + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_1} + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2}.
\end{aligned}$$

$$\Delta_{13}(p) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} & p + \frac{1}{R_2 C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{L_1}.$$

$$\Delta_{23}(p) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{1}{R_2 C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{vmatrix} = -\left(p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2}\right) \frac{1}{L_1}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{33}(p) &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{1}{R_2 C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & p + \frac{1}{R_2 C_2} \end{vmatrix} = \left(p + \frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2}\right) \left(p + \frac{1}{R_2 C_2}\right) - \\
& - \frac{1}{R_2 C_1} \frac{1}{R_2 C_2} = p^2 + p \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}.
\end{aligned}$$

Найдём выражение для переменной  $x_3$  по формуле (3.3):

$$\Delta(p)x_3 = \Delta_{33}(p) \frac{U_1}{L_1}.$$

Умножим обе части найденного ранее выражения для выходного сигнала на дифференциальный оператор  $\Delta(p)$ . Получим:

$$\Delta(p)U_2 = \Delta(p)x_3R_3 = \Delta_{33}(p)\frac{R_3}{L_1}U_1.$$

В операторной форме уравнение вход-выходного описания системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & p^3U_2 + p^2\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2} + \frac{R_3}{L_1}\right)U_2 + \\ & + p\left(\frac{1}{L_1C_2} + \frac{R_3}{L_1}\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2}\right) + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}\right)U_2 + \\ & + \left(\frac{1}{L_1C_1C_2R_1} + \frac{1}{L_1C_1C_2R_2} + \frac{R_3}{L_1C_1C_2R_1R_2}\right)U_2 = \\ & = p^2\frac{R_3}{L_1}U_1 + p\frac{R_3}{L_1}\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2}\right)U_1 + \frac{R_3}{L_1C_1C_2R_1R_2}U_1. \end{aligned}$$

Соответствующее дифференциальное уравнение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3U_2}{dt^3} + \left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2} + \frac{R_3}{L_1}\right)\frac{d^2U_2}{dt^2} + \\ & + \left(\frac{1}{L_1C_2} + \frac{R_3}{L_1}\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2}\right) + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}\right)\frac{dU_2}{dt} + \\ (3.5) \quad & + \left(\frac{1}{L_1C_1C_2R_1} + \frac{1}{L_1C_1C_2R_2} + \frac{R_3}{L_1C_1C_2R_1R_2}\right)U_2 = \\ & = \frac{R_3}{L_1}\frac{d^2U_1}{dt^2} + \frac{R_3}{L_1}\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_2R_2}\right)\frac{dU_1}{dt} + \frac{R_3}{L_1C_1C_2R_1R_2}U_1. \end{aligned}$$

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой искомое вход-выходное описание исследуемой динамической системы.

Аналогичный результат можно было бы получить, применив метод последовательного исключения промежуточных переменных к поэлементной математической модели исследуемой динамической системы, полученной в лабораторной работе № 1. Однако, этот метод менее формализован и пригоден лишь для относительно простых моделей невысокого порядка.

Полученное вход-выходное описание динамической системы менее пригодно для проведения расчётов на ЭВМ, но более удобно для аналитических исследований.

Пусть, например, нам требуется определить установившееся значение выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого сигнала (т. е. промоделировать работу электрического устройства при подаче на его вход постоянного напряжения 1 В).

В установившемся режиме все производные будут равны нулю. Следовательно, уравнение (3.5) примет следующий вид:

$$\left( \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_1} + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2} \right) U_2 = \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2} U_1.$$

Откуда значение выходной величины можно определить по формуле:

$$U_2 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} U_1.$$

Для проверки полученного результата рассмотрим схему (1.1) в установившемся режиме при подаче на вход постоянного напряжения. В таких условиях конденсатор можно рассматривать как разрыв цепи, а катушку индуктивности не учитывать. Тогда электрическая схема принимает вид, изображенный на рисунке 3.1.

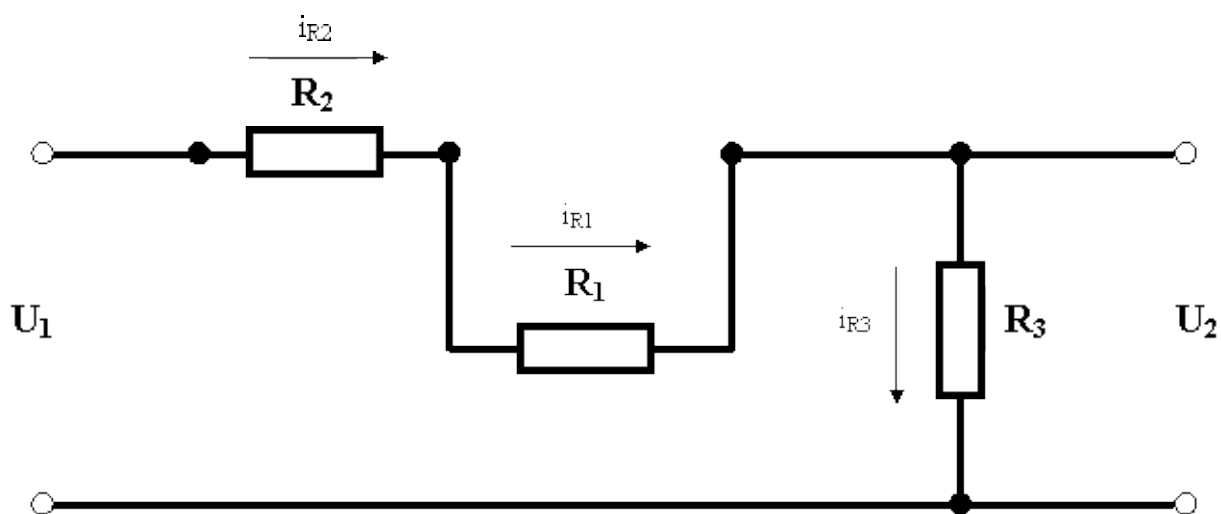


Рисунок 3.1 – Схема электрической цепи



Очевидно, что  $i_{R1} = i_{R2} = i_{R3}$ . Расчёт получившегося делителя напряжения является элементарной задачей. Выходная величина будет определяться следующим соотношением:

$$U_2 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} U_1.$$

Это значение полностью согласуется с полученным ранее результатом.

Конкретные значения коэффициентов дифференциального уравнения (3.5) можно рассчитать, задав числовые значения параметров электрической схемы. Пусть, например:

$$\begin{cases} L_1 = 0,1 \text{ Гн}; \\ C_1 = 0,001 \text{ Ф}; \\ C_2 = 0,002 \text{ Ф}; \\ R_1 = 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = 20 \text{ Ом}; \\ R_3 = 40 \text{ Ом}. \end{cases}$$

Тогда уравнение (3.5) будет иметь следующий вид:

$$\ddot{U}_2 + 575\dot{U}_2 + 7,75 \cdot 10^4 U_2 + 1,75 \cdot 10^6 U_2 = 400\ddot{U}_1 + 7 \cdot 10^4 \dot{U}_1 + 10^6 U_1.$$

При заданных начальных условиях это уравнение может быть проинтегрировано как численными методами, так и аналитически.

Аналитическое решение уравнения третьего порядка сопряжено со значительными трудностями, поэтому более эффективным представляется использованием численных методов.

Для численного интегрирования полученного уравнения предварительно требуется осуществить его преобразование к системе уравнений первого порядка (т. к. уравнение имеет третий порядок, то оно может быть приведено к системе из трёх уравнений первого порядка).

Введём вспомогательную переменную  $z$  такую, что:

$$\begin{cases} \ddot{z} + 575\dot{z} + 7,75 \cdot 10^4 z + 1,75 \cdot 10^6 z = U_1; \\ 400\ddot{z} + 7 \cdot 10^4 \dot{z} + 10^6 z = U_2. \end{cases}$$

Обозначим:

$$z_1 = z; \quad z_2 = \dot{z}_1 = \dot{z}; \quad z_3 = \dot{z}_2 = \ddot{z}.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = z_3; \\ \dot{z}_3 = U_1 - 1,75 \cdot 10^6 z_1 - 7,75 \cdot 10^4 z_2 - 575 z_3; \\ U_2 = 10^6 z_1 + 7 \cdot 10^4 z_2 + 400 z_3. \end{cases}$$

Полученная модель может быть использована для исследования рассматриваемой динамической системы. Например, задав в качестве начальных условий значение вспомогательной переменной  $z$ , её первой и второй производной в начальный момент времени, мы получим классическую задачу Коши, которая может быть легко решена любым численным методом.

Для примера определим реакцию рассматриваемой системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях.

$$U_1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 0.$$

Решим полученную систему дифференциальных уравнений любым из известных численных методов. Например, при использовании метода Эйлера расчётные формулы будут иметь вид:

$$\begin{cases} z_1(i+1) = z_1(i) + h z_2(i); \\ z_2(i+1) = z_2(i) + h z_3(i); \\ z_3(i+1) = z_3(i) + h(1 - 1,75 \cdot 10^6 z_1(i) - 7,75 \cdot 10^4 z_2(i) - 575 z_3(i)). \end{cases}$$

Выходная величина будет определяться следующим выражением:

$$U_2(i) = 10^6 z_1(i) + 7 \cdot 10^4 z_2(i) + 400 z_3(i).$$

Графики, показывающие зависимость от времени вспомогательных переменных, приведены на рисунках 3.2 – 3.4; график выходной величины  $U_2$  – на рисунке 3.5. Исходя из сведения о динамике изучаемого процесса, выберем шаг интегрирования:  $h = 0,001$ .

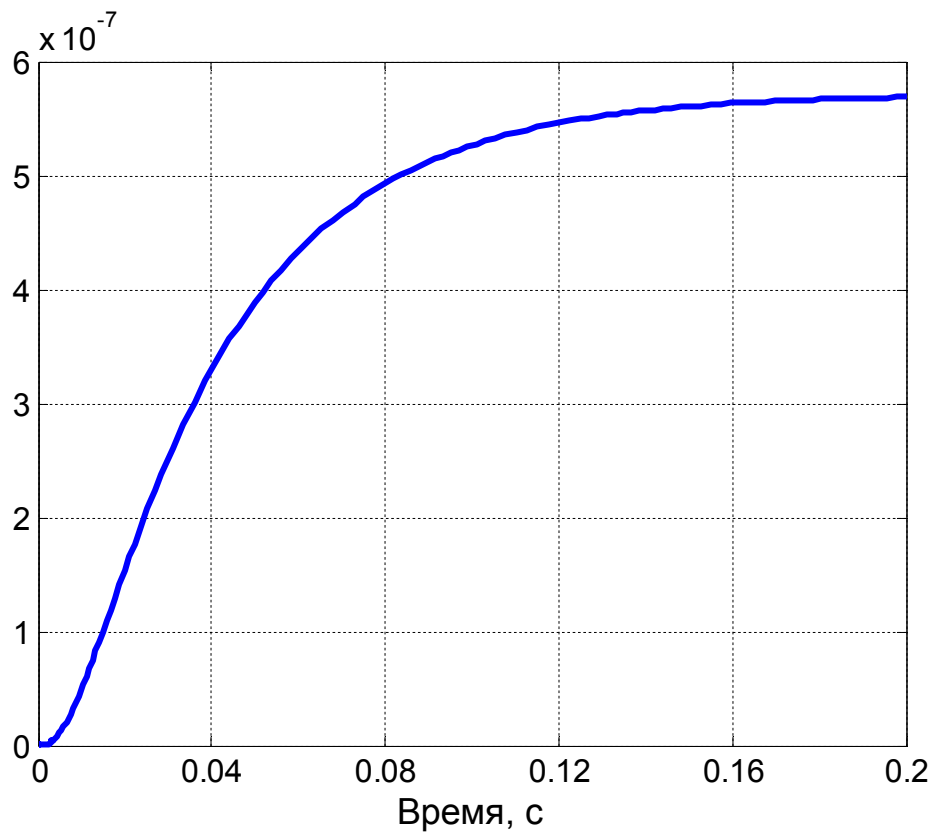


Рисунок 3.2 – График переменной  $z_1$

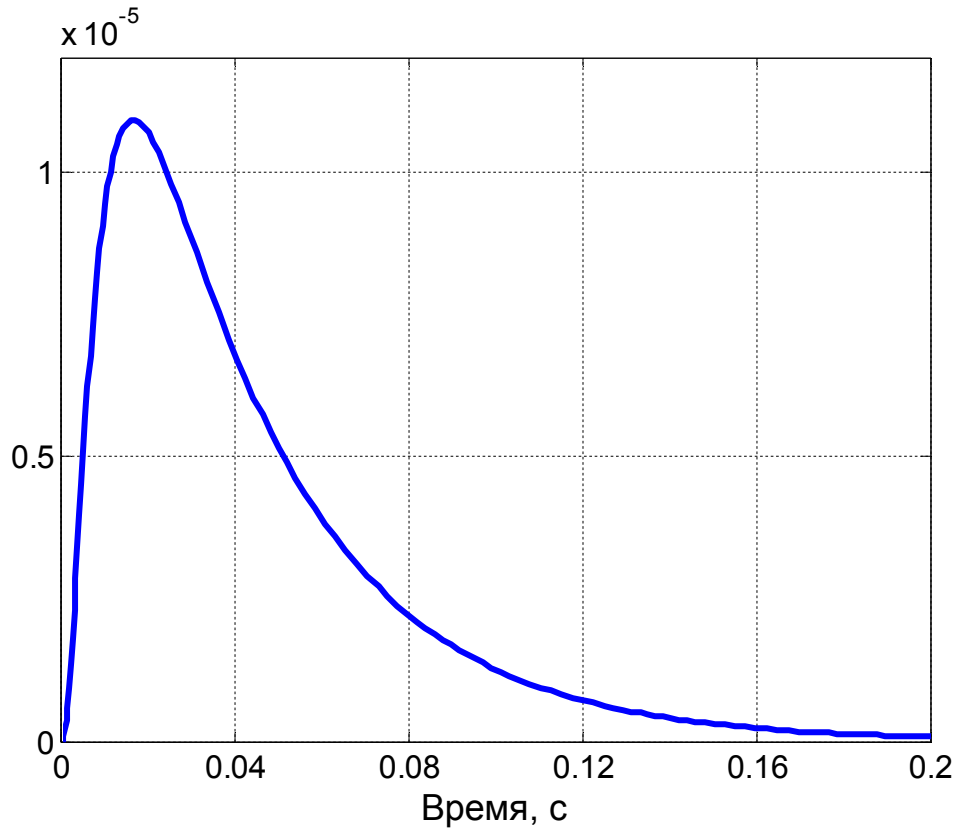


Рисунок 3.3 – График переменной  $z_2$

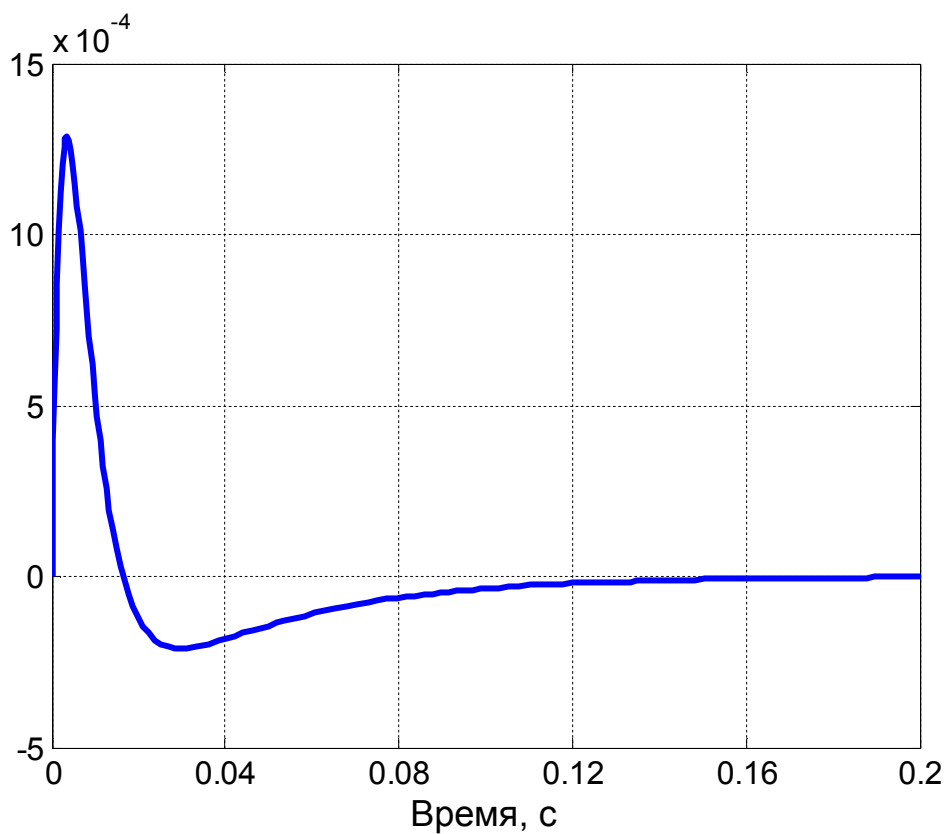


Рисунок 3.4 – График переменной  $z_3$

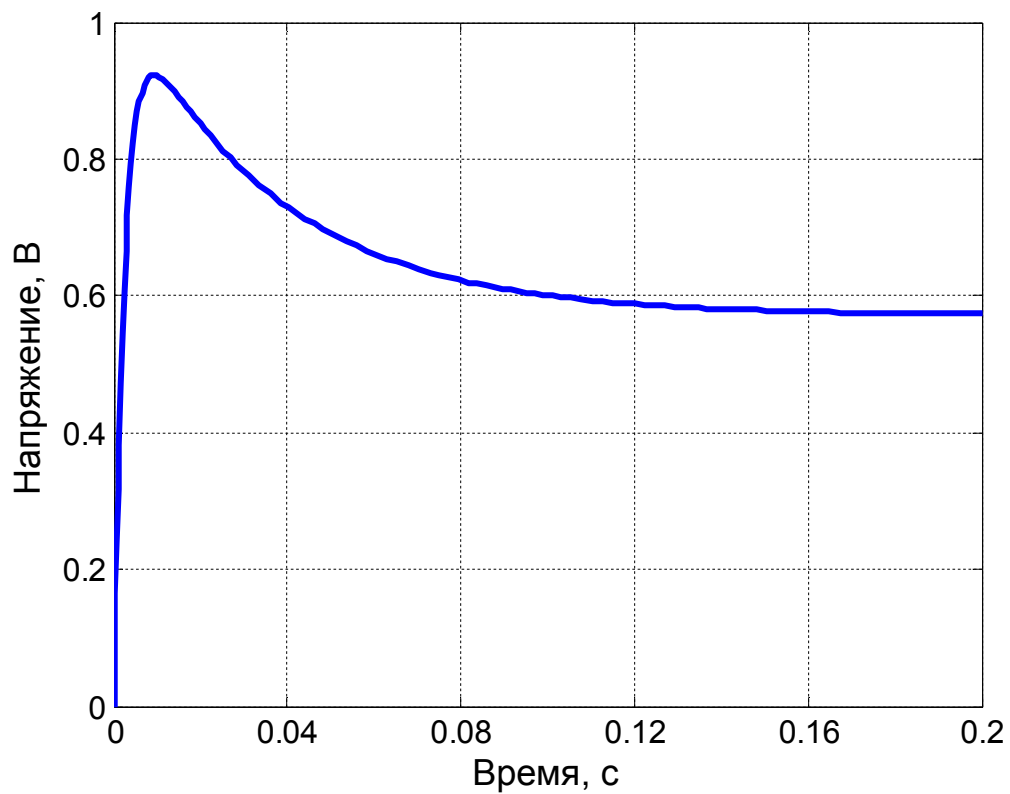


Рисунок 3.5 – График выходного сигнала  $U_2$

Аналогичным образом можно рассчитывать реакцию динамической системы и на другие внешние воздействия при ненулевых начальных условиях. Расчётная модель будет той же самой, изменится лишь вид функции  $U_1(t)$  и величины  $z_1(0)$ ,  $z_2(0)$ ,  $z_3(0)$ .

### ***Контрольные вопросы***

1. Что называется вход-выходным описанием динамической системы?
2. Какие достоинства и недостатки имеет вход-выходное описание динамической системы?
3. Каким образом может быть получено вход-выходное описание динамической системы?
4. Как можно перейти от вход-выходного описания системы с одним входом и одним выходом к модели в пространстве состояний?

## **Лабораторная работа № 4.**

### **Разработка и исследование математической модели динамической системы с использованием интегрального преобразования Лапласа**

**Цель работы:** практическое применение знаний в области математики и физики при создании и исследовании математической модели процессов, происходящих в электрических устройствах, с использованием интегрального преобразования Лапласа.

**Задача:** разработать математическую модель пассивного электрического четырехполюсника в форме передаточной функции и определить реакцию исследуемой системы на различные входные воздействия.

#### ***Этапы работы:***

1. Изучить необходимый теоретический материал.
2. Получить математическую модель системы в форме передаточной функции, используя результаты лабораторной работы № 2 и лабораторной работы № 3.
3. Определить в аналитической форме реакцию динамической системы на заданные входные сигналы при нулевых начальных условиях.
4. Определить в аналитической форме реакцию динамической системы на единичный ступенчатый сигнал при заданных ненулевых начальных условиях.
5. Построить графики функций, полученных в результате выполнения п. 3 и п. 4.
6. Оформить отчет по лабораторной работе.

#### ***Отчет о работе должен содержать:***

1. Электрическую схему исследуемого устройства.
2. Передаточную функцию динамической системы.

3. Аналитические выражения для реакции динамической системы на заданные входные сигналы при нулевых начальных условиях.
4. Аналитическое выражение для реакции динамической системы на единичный ступенчатый сигнал при заданных ненулевых начальных условиях.
5. Графики реакций динамической системы на входные воздействия при нулевых и ненулевых начальных условиях.
6. Выводы и заключения по лабораторной работе.

### ***Варианты заданий***

Совпадают с тем, что были заданы при выполнении лабораторной работы № 1.

Параметры элементов электрической схемы задаются преподавателем.

В качестве входных сигналов, реакция на которые должна быть исследована, следует использовать:

- единичную ступенчатую функцию;
- дельта-функцию;
- линейно нарастающий сигнал (скорость нарастания задаётся преподавателем);
- импульсный сигнал единичной площади.

Ненулевые начальные условия задаются преподавателем.

### ***Теоретическая справка***

Одной из форм вход-выходного описания динамической системы является передаточная функция.

**Передаточная функция** динамической системы – это отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях.

Как известно из курса математического анализа, сущность интегрального преобразования Лапласа заключается в том, что некоторой функции времени  $f(t)$  ставится в соответствие другая функция комплексного переменного  $F(s)$  при условии, что существует интеграл специального вида.

Ниже представлены формулы для вычисления прямого

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

и обратного

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0, \quad c = \operatorname{Re}(s).$$

преобразования Лапласа.

Здесь  $f(t)$  – функция-оригинал,  $F(s)$  – изображение по Лапласу.

Функция  $f(t)$  может быть оригиналом, если она обладает следующими свойствами:

1. Для всех  $t \geq 0$  функция  $f(t)$  непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.
2. Для всех  $t < 0$  функция  $f(t) = 0$ .
3. Функция  $f(t)$  имеет ограниченный порядок роста, т. е. можно указать такие числа  $M, C$ , что при  $t \geq 0$  всегда выполняется условие  $f(t) < Me^{Ct}$ .

Чтобы обеспечить существование интеграла, многие функции умножают на единичную ступенчатую функцию и рассматривают в дальнейшем их произведение (использование единичной ступенчатой функции можно интерпретировать как факт включения сигнала в некоторый момент времени).

Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) определяется следующим выражением:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Свойства интегрального преобразования Лапласа приведены в приложении 2. Таблица оригиналов и изображений для наиболее часто используемых функций представлена в приложении 3.

Передаточная функция динамической системы может быть получена из дифференциального уравнения, описывающего поведение этой системы. Для этого достаточно применить прямое преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях к обеим частям уравнения,



вынести в правой и левой частях общие множители – изображения входной и выходной величины, после чего решить полученное алгебраическое уравнение.

Выполнив описанную процедуру в обратном порядке, можно получить по передаточной функции вход-выходное описание динамического объекта в виде дифференциального уравнения. Таким образом, две данных формы представления математической модели являются эквивалентными.

Достоинством передаточной функции является то, что её использование позволяет работать с интегралами и производными как с обычными дробями (умножать, делить, складывать), что бывает полезно при анализе сложных систем, когда сначала могут быть получены передаточные функции отдельных элементов, а затем – передаточная функция всей системы.

Передаточная функция динамической системы может быть получена также из модели в пространстве состояний вида (2.1) по формуле:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + D.$$

Передаточная функция может быть использована для исследования динамической системы, в частности, для определения реакции системы на произвольное входное воздействие.

Если начальные условия приняты нулевыми, то согласно определению:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Здесь  $Y(s)$  – изображение выходного сигнала, а  $U(s)$  – изображение входного сигнала.

Следовательно, при известной передаточной функции и изображении входного сигнала, изображение выходного сигнала может быть найдено по формуле:

$$Y(s) = W(s)U(s).$$

На следующем этапе, осуществив обратное преобразование Лапласа или используя таблицы типовых оригиналов/изображений, мы можем получить выходную величину как функцию времени.

Если начальные условия приняты не нулевыми, то процедура расчёта несколько усложняется.

Пусть динамическая система описывается дифференциальным уравнением вида (3.1). Применяв к обеим частям уравнения интегральное преобразование Лапласа, получим:

$$A(s)Y(s) - P(s) = B(s)U(s) - Q(s).$$

Здесь  $A(s)$ ,  $B(s)$  – полиномы, зависящие от коэффициентов дифференциального уравнения;  $P(s)$ ,  $Q(s)$  – полиномы, зависящие от коэффициентов дифференциального уравнения и от начальных значений входного и выходного сигналов соответственно.

Тогда изображение выходного сигнала может быть найдено по формуле:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{P(s) - Q(s)}{A(s)}$$

или же

$$Y(s) = W(s)U(s) + \frac{P(s) - Q(s)}{A(s)}.$$

Получив аналитическое выражение для изображения выходной величины, можно в дальнейшем перейти к функции времени аналогично предыдущему варианту.

### ***Пример***

Требуется определить передаточную функцию для устройства, электрическая схема которого приведена на рисунке 1.1.

Ранее для этой динамической системы было получено вход-выходное описание (3.5). Применим к данному линейному дифференциальному уравнению интегральное преобразование Лапласа, полагая начальные условия для входного и выходного сигнала нулевыми. Получим:

$$\begin{aligned}
& s^3 U_2(s) + \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1} \right) s^2 U_2(s) + \\
& + \left( \frac{1}{L_1 C_2} + \frac{R_3}{L_1} \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \right) s U_2(s) + \\
& + \left( \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_1} + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2} \right) U_2(s) = \\
& = \frac{R_3}{L_1} s^2 U_1(s) + \frac{R_3}{L_1} \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) s U_1(s) + \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2} U_1(s).
\end{aligned}$$

Для повышения компактности записи, введём обозначения:

$$\begin{cases}
a_0 = \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_1} + \frac{1}{L_1 C_1 C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2}; \\
a_1 = \frac{1}{L_1 C_2} + \frac{R_3}{L_1} \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}; \\
a_2 = \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{R_3}{L_1} \right); \\
b_0 = \frac{R_3}{L_1 C_1 C_2 R_1 R_2}; \quad b_1 = \frac{R_3}{L_1} \left( \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right); \quad b_2 = \frac{R_3}{L_1}.
\end{cases}$$

Тогда приведённое выше операторное уравнение можно будет записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& s^3 U_2(s) + a_2 s^2 U_2(s) + a_1 s U_2(s) + a_0 U_2(s) = \\
& = b_2 s^2 U_1(s) + b_1 s U_1(s) + b_0 U_1(s).
\end{aligned}$$

Откуда, приведя подобные, получим:

$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) U_2(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) U_1(s).$$

Передаточную функцию рассматриваемой системы найдём по формуле:

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Конкретные значения коэффициентов передаточной функции определим, задав числовые значения параметров электрической схемы.

Пусть, например:

$$\begin{cases} L_1 = 0,1 \text{ Гн}; \\ C_1 = 0,001 \text{ Ф}; \\ C_2 = 0,002 \text{ Ф}; \\ R_1 = 10 \text{ Ом}; \\ R_2 = 20 \text{ Ом}; \\ R_3 = 40 \text{ Ом}. \end{cases}$$

Тогда передаточная функция изучаемой системы будет иметь следующий вид:

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6}.$$

С помощью полученного выражения мы можем достаточно легко найти реакцию исследуемой динамической системы на различные внешние воздействия при произвольных начальных условиях.

1. Определим реакцию системы на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях. Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

$$U_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Его изображение по Лапласу найдём по таблице из приложения 3:

$$U_1(s) = \frac{1}{s}.$$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$U_2(s) = W(s)U_1(s) = \frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)}.$$

Чтобы найти выражение для выходного сигнала как функции времени, разложим  $U_2(s)$  на элементарные дроби.

Определим корни полинома знаменателя:  $s_1 = 0$ ;  $s_2 \approx -28$ ;  $s_3 \approx -161$ ;  $s_4 \approx -386$ . Все корни действительные не кратные. Значит, исходная дробь может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+28} + \frac{C}{s+161} + \frac{D}{s+386}.$$

Определим неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  любым из известных методов (например, методом неопределённых коэффициентов). Получим:

$$A \approx 0,57; \quad B \approx 0,48; \quad C \approx 0,02; \quad D \approx -1,08.$$

Следовательно, изображение выходного сигнала будет задаваться выражением:

$$U_2(s) = \frac{0,57}{s} + \frac{0,48}{s+28} + \frac{0,02}{s+161} + \frac{-1,08}{s+386}.$$

Оригинал функции  $U_2(s)$  определим по таблице из приложения 3:

$$U_2(t) = (0,57 + 0,48e^{-28t} + 0,02e^{-161t} - 1,08e^{-386t}) \cdot 1(t).$$

График этой функции представлен на рисунке 4.1.

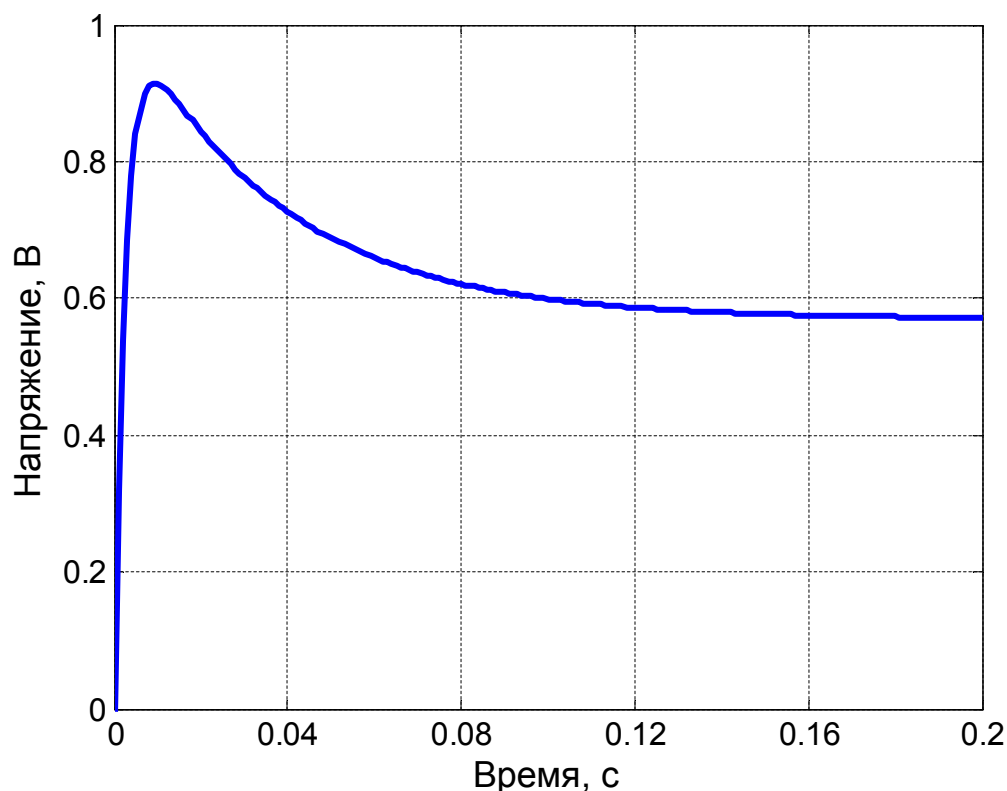


Рисунок 4.1 – График реакции на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях

Полученный результат практически совпадает с тем, что был ранее получен в лабораторной работе № 3 и представлен на рисунке 3.5.

2. Определим реакцию системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях. Как известно, дельта-функция обращается в бесконечность в точке 0 и равна нулю в остальные моменты времени (её можно интерпретировать как производную единичной ступенчатой функции). Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

$$U_1(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Его изображение по Лапласу найдём по таблице из приложения 3:

$$U_1(s) = 1.$$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$U_2(s) = W(s)U_1(s) = \frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6}.$$

Чтобы найти выражение для выходного сигнала как функции времени, разложим  $U_2(s)$  на элементарные дроби.

Корни полинома знаменателя:  $s_1 \approx -28$ ;  $s_2 \approx -161$ ;  $s_3 \approx -386$ . Все корни действительные не кратные. Следовательно, исходная дробь может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6} = \frac{A}{s + 28} + \frac{B}{s + 161} + \frac{C}{s + 386}.$$

Определим неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$A \approx -13,58; \quad B \approx -3,29; \quad C \approx 416,86.$$

Следовательно, изображение выходного сигнала будет задаваться выражением:

$$U_2(s) = \frac{-13,58}{s + 28} + \frac{-3,29}{s + 161} + \frac{416,86}{s + 386}.$$

Оригинал функции  $U_2(s)$  определим по таблице из приложения 3:

$$U_2(t) = (-13,58e^{-28t} - 3,29e^{-161t} + 416,86e^{-386t}) \cdot 1(t).$$

График этой функции представлен на рисунке 4.2.

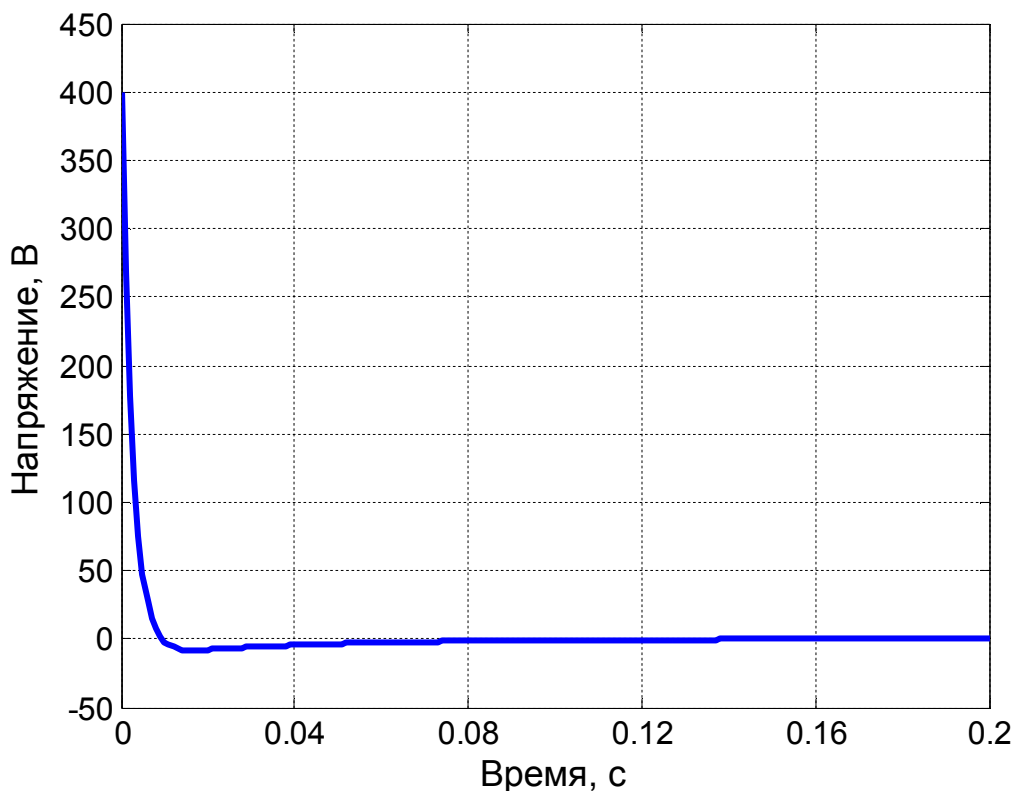


Рисунок 4.2 – График реакции на дельта-функцию при нулевых начальных условиях

3. Определим реакцию системы на линейно нарастающий сигнал при нулевых начальных условиях. Полагая скорость нарастания равной 2, найдём выражение для входного сигнала как функция времени:

$$U_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Его изображение по Лапласу найдём по таблице из приложения 3:

$$U_1(s) = \frac{2}{s^2}.$$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$U_2(s) = W(s)U_1(s) = \frac{2(400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6)}{s^2(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)}.$$

Чтобы найти выражение для выходного сигнала как функции времени, разложим  $U_2(s)$  на элементарные дроби.

Корни полинома знаменателя:  $s_{1,2} = 0$ ,  $s_3 \approx -28$ ;  $s_4 \approx -161$ ;  $s_5 \approx -386$ . Все корни действительные, имеется один кратный. Следовательно, исходная дробь может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{2(400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6)}{s^2(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+28} + \frac{D}{s+161} + \frac{E}{s+386}.$$

Определим неизвестные коэффициенты  $A, B, C, D, E$ :

$$A \approx 0,0293; \quad B \approx 1,1494; \quad C \approx -0,0346; \quad D \approx -0,0003; \quad E \approx 0,0056.$$

Следовательно, изображение выходного сигнала будет задаваться выражением:

$$U_2(s) = \frac{0,0293}{s} + \frac{1,1494}{s^2} + \frac{-0,0346}{s+28} + \frac{-0,0003}{s+161} + \frac{0,0056}{s+386}.$$

Оригинал функции  $U_2(s)$  определим по таблице из приложения 3:

$$U_2(t) = (0,0293 + 1,1494t - 0,0346e^{-28t} - 0,0003e^{-161t} + 0,0056e^{-386t}) \cdot 1(t).$$

График этой функции представлен на рисунке 4.3.

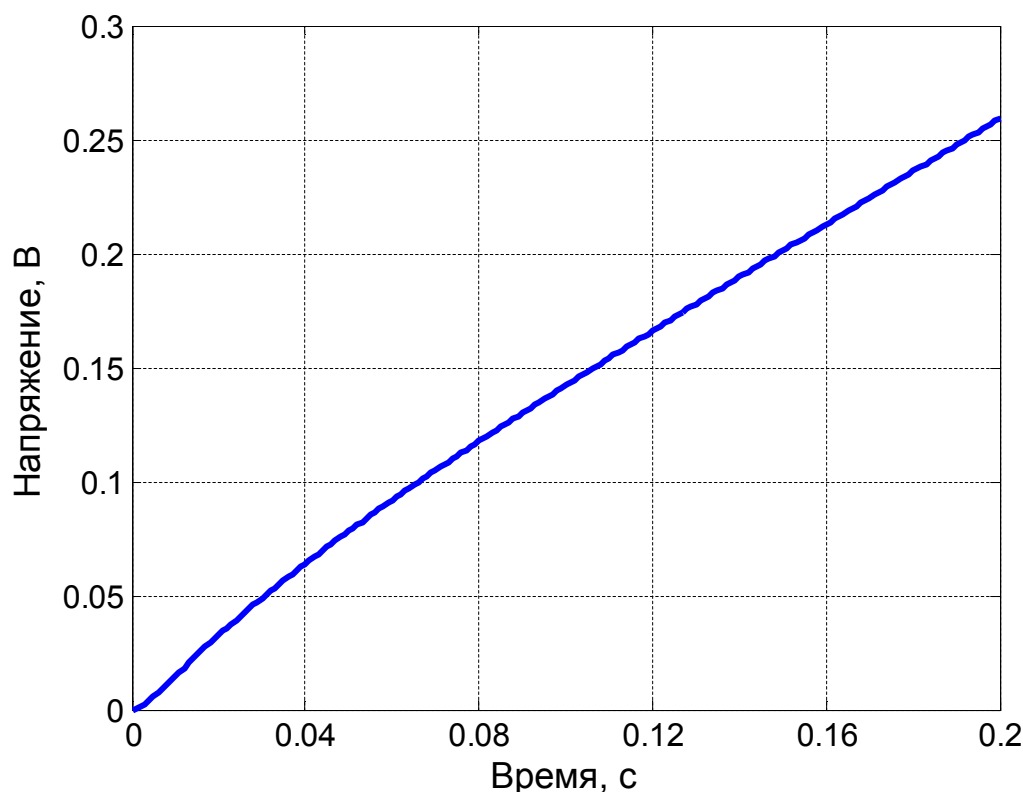


Рисунок 4.3 – График реакции на линейно нарастающий сигнал при нулевых начальных условиях



4. Определим реакцию системы на импульсный сигнал единичной площади при нулевых начальных условиях. Пусть длительность импульса  $T = 0,1$  с. Тогда входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

$$U_1(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0; 0,1]; \\ 10, & t \in [0; 0,1]. \end{cases}$$

Это выражение можно переписать, используя единичную ступенчатую функцию:

$$U_1(t) = 10 \cdot 1(t) - 10 \cdot 1(t - 0,1).$$

Изображение этой функции можно найти, используя приложения 2 и 3:

$$U_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s} e^{-0,1s}.$$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$U_2(s) = W(s)U_1(s) = \frac{10(400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6)}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)} - \frac{10(400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6)}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)} e^{-0,1s}.$$

Для разложения функции из правой части данного выражения воспользуемся результатами, полученными в п. 1. Изображение выходного сигнала будет задаваться выражением:

$$U_2(s) = 10 \cdot \left( \frac{0,57}{s} + \frac{0,48}{s+28} + \frac{0,02}{s+161} + \frac{-1,08}{s+386} \right) - 10 \cdot \left( \frac{0,57}{s} + \frac{0,48}{s+28} + \frac{0,02}{s+161} + \frac{-1,08}{s+386} \right) e^{-0,1s}.$$

Оригинал функции  $U_2(s)$  определим по таблице из приложения 3:

$$U_2(t) = 10 \cdot (0,57 + 0,48e^{-28t} + 0,02e^{-161t} - 1,08e^{-386t}) \cdot 1(t) - 10 \cdot (0,57 + 0,48e^{-28(t-0,1)} + 0,02e^{-161(t-0,1)} - 1,08e^{-386(t-0,1)}) \cdot 1(t-0,1).$$

График этой функции представлен на рисунке 4.4.

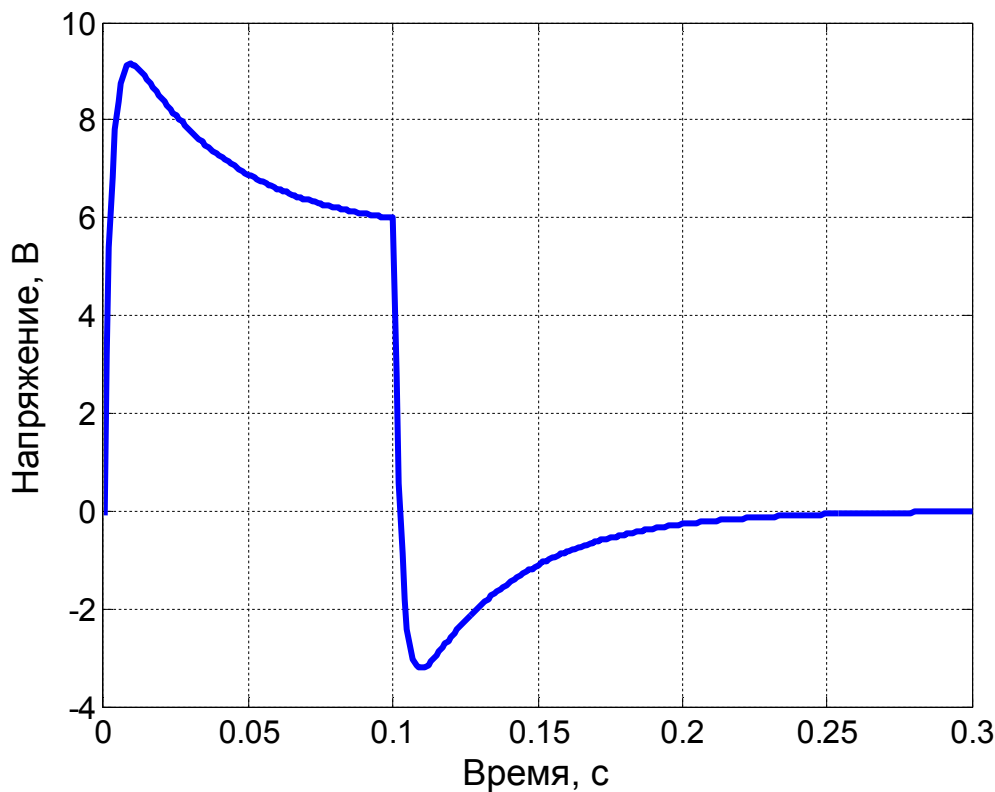


Рисунок 4.4 – График реакции на импульсный сигнал при нулевых начальных условиях

5. Определим реакцию системы на единичный ступенчатый сигнал при ненулевых начальных условиях. Пусть, например,  $U_2(0) = 1$ ,  $\dot{U}_2(0) = 0$ ,  $\ddot{U}_2(0) = 0$ . Тогда изображения по Лапласу производных выходного сигнала можно найти по формуле из приложения 2:

$$L\{\dot{U}_2(t)\} = sU_2(s) - 1.$$

$$L\{\ddot{U}_2(t)\} = s^2U_2(s) - s.$$

$$L\{\dddot{U}_2(t)\} = s^3U_2(s) - s^2.$$

Изображение по Лапласу входного сигнала найдём по таблице из приложения 3:

$$U_1(s) = \frac{1}{s}.$$

При заданных условиях изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$U_2(s) = W(s)U_1(s) + \frac{P(s)}{A(s)} = \frac{400s^2 + 7 \cdot 10^4 s + 10^6}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)} + \frac{s^2 + 575s + 7,75 \cdot 10^4}{s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6}.$$

Приведя подобные, найдём выражение для изображения выходного сигнала:

$$U_2(s) = \frac{s^3 + 975s^2 + 1,475 \cdot 10^5 s + 10^6}{s(s^3 + 575s^2 + 7,75 \cdot 10^4 s + 1,75 \cdot 10^6)}.$$

Разложим  $U_2(s)$  на элементарные дроби:

$$U_2(s) = \frac{0,57}{s} + \frac{1,79}{s+28} + \frac{-0,34}{s+161} + \frac{-1,02}{s+386}.$$

Оригинал функции  $U_2(s)$  определим по таблице из приложения 3:

$$U_2(t) = (0,57 + 1,79e^{-28t} - 0,34e^{-161t} - 1,02e^{-386t}) \cdot 1(t).$$

График этой функции представлен на рисунке 4.5.

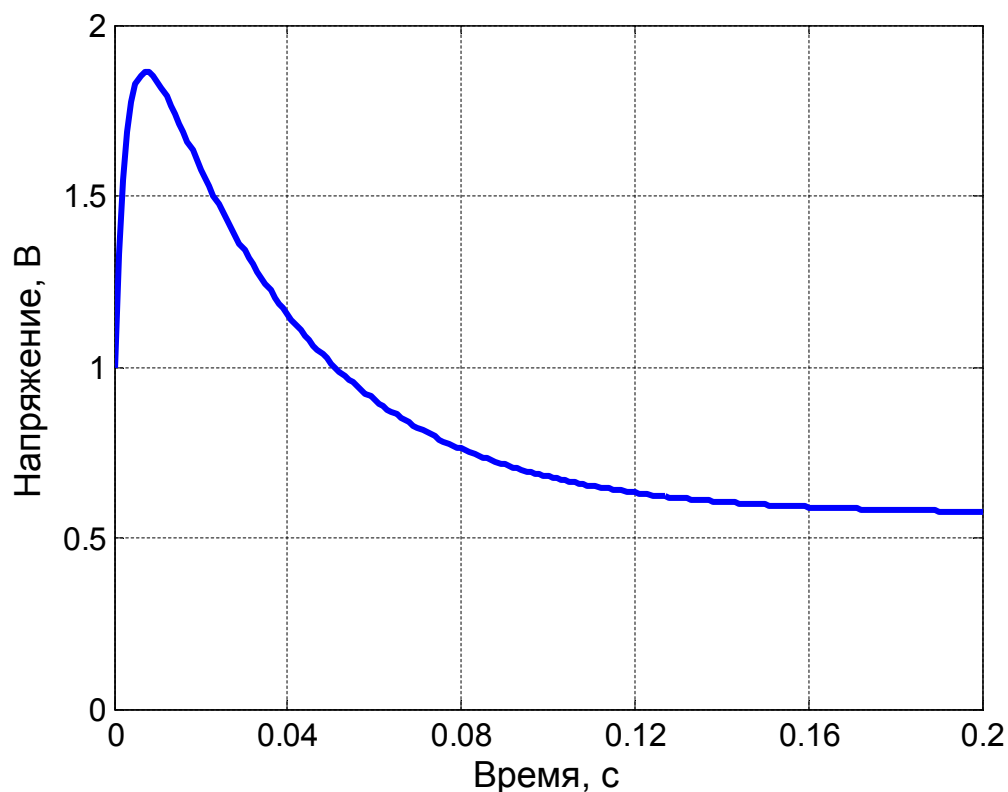


Рисунок 4.5 – График реакции на единичный ступенчатый сигнал при ненулевых начальных условиях

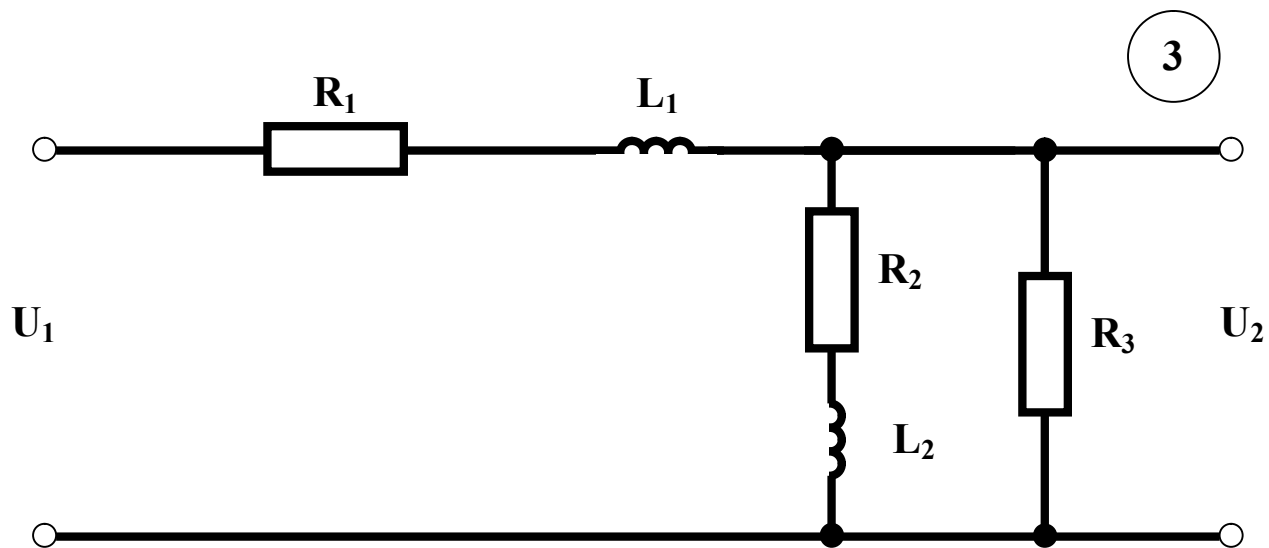
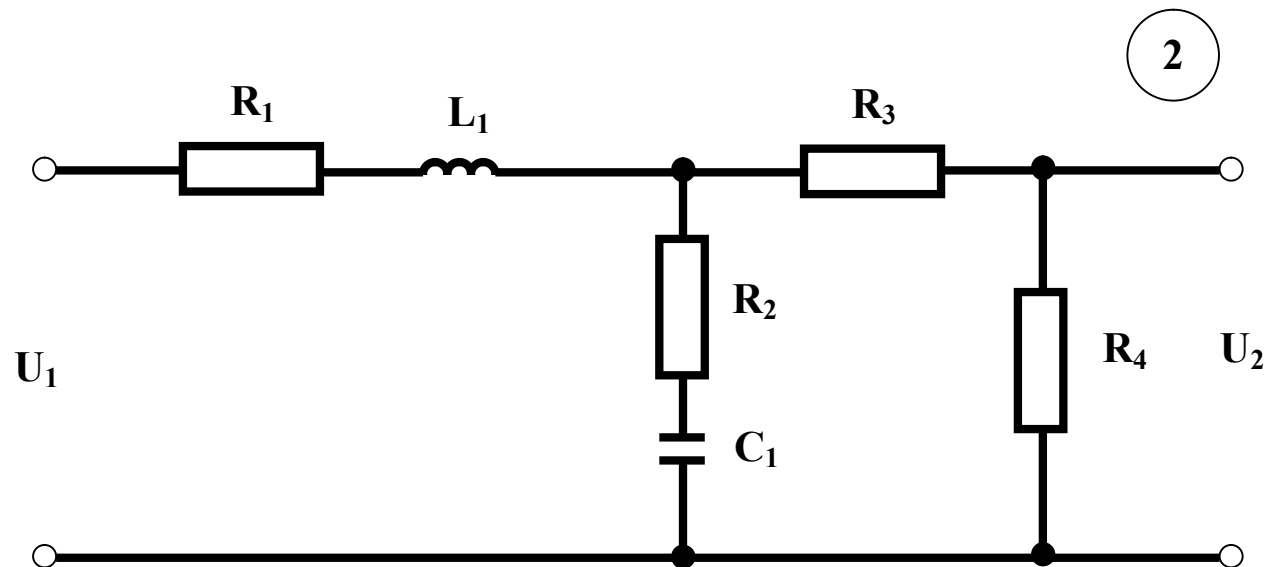
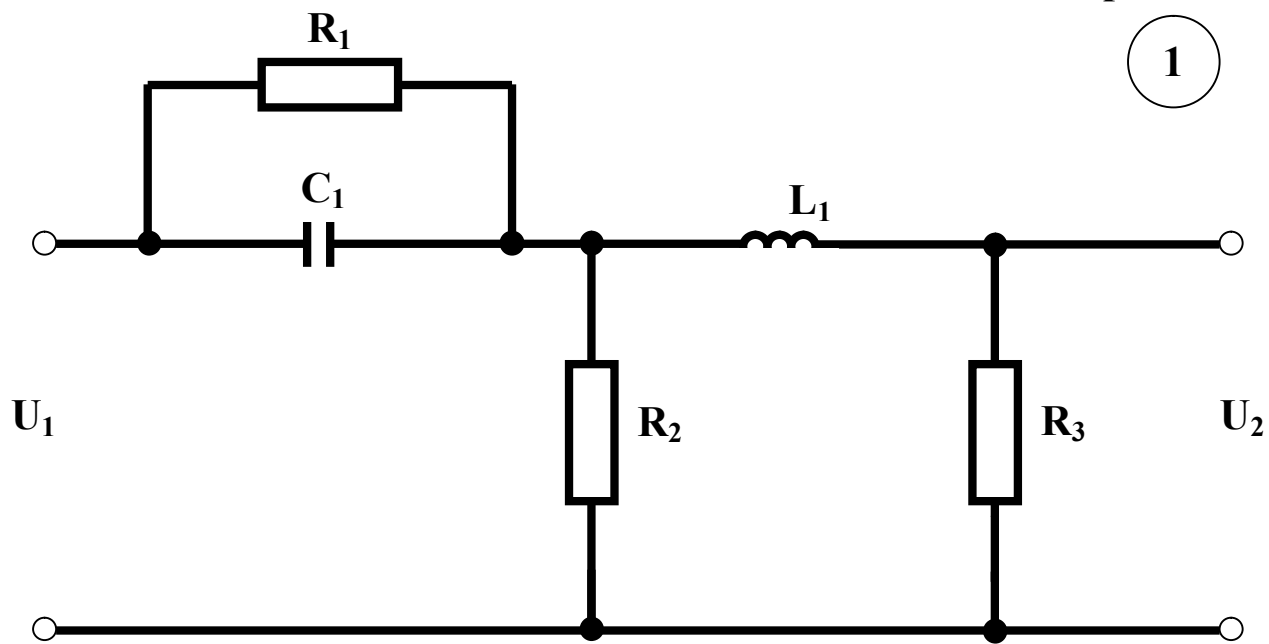
### ***Контрольные вопросы***

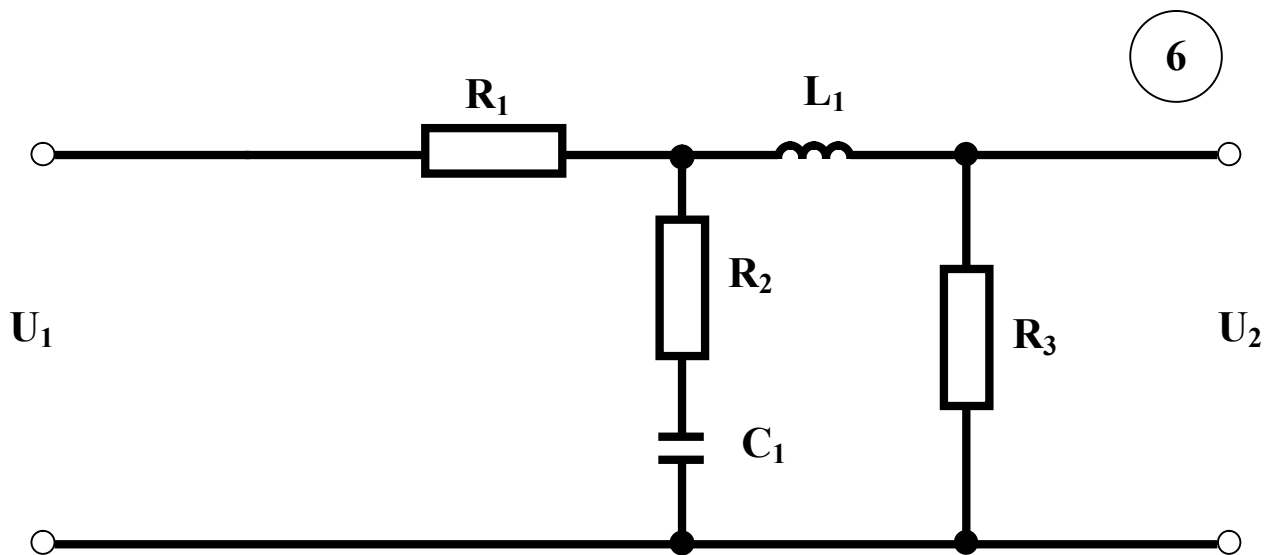
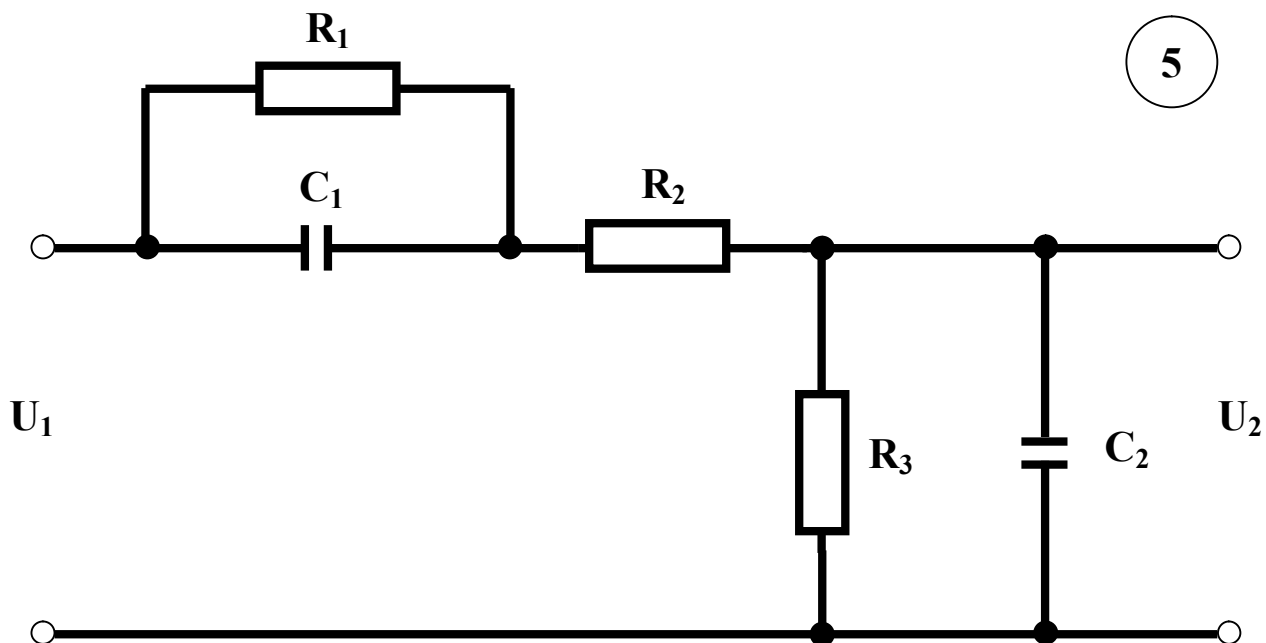
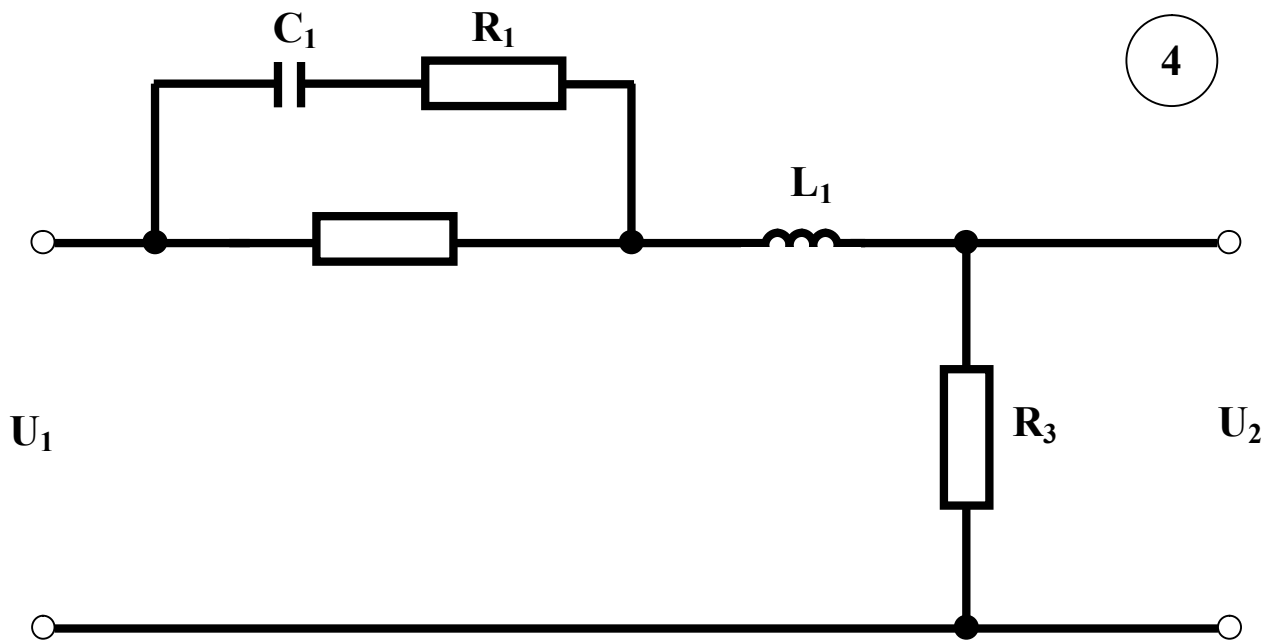
1. Что называется передаточной функцией?
2. Что представляет собой преобразование Лапласа?
3. Как можно получить передаточную функцию динамической системы?
4. Как с помощью передаточной функции определить реакцию системы на произвольный входной сигнал при нулевых начальных условиях?
5. Как с помощью передаточной функции определить реакцию системы на произвольный входной сигнал при ненулевых начальных условиях?

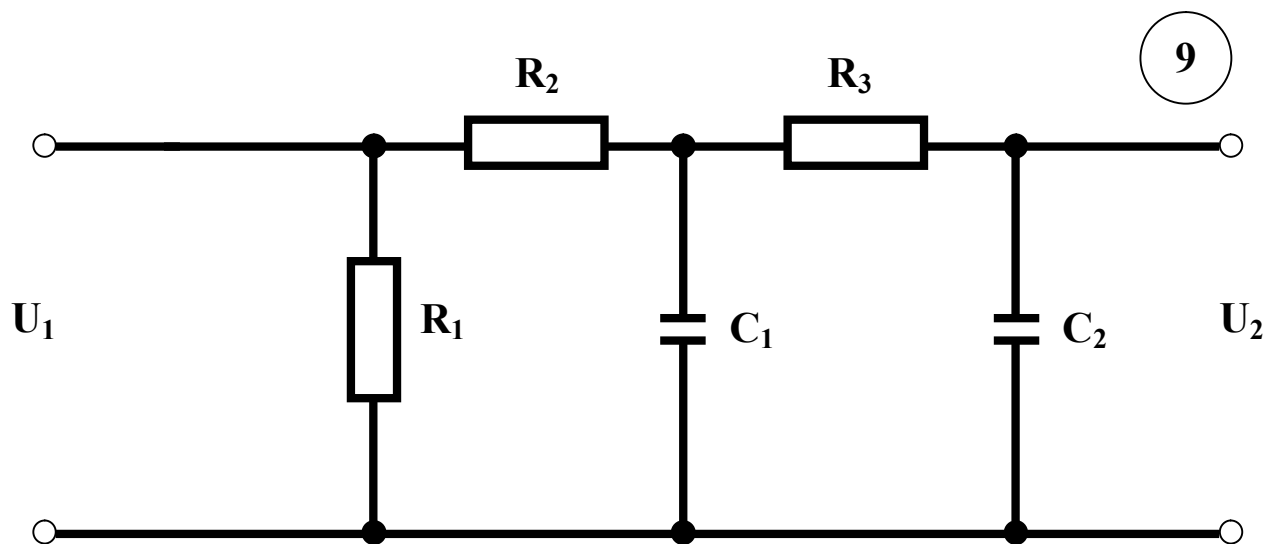
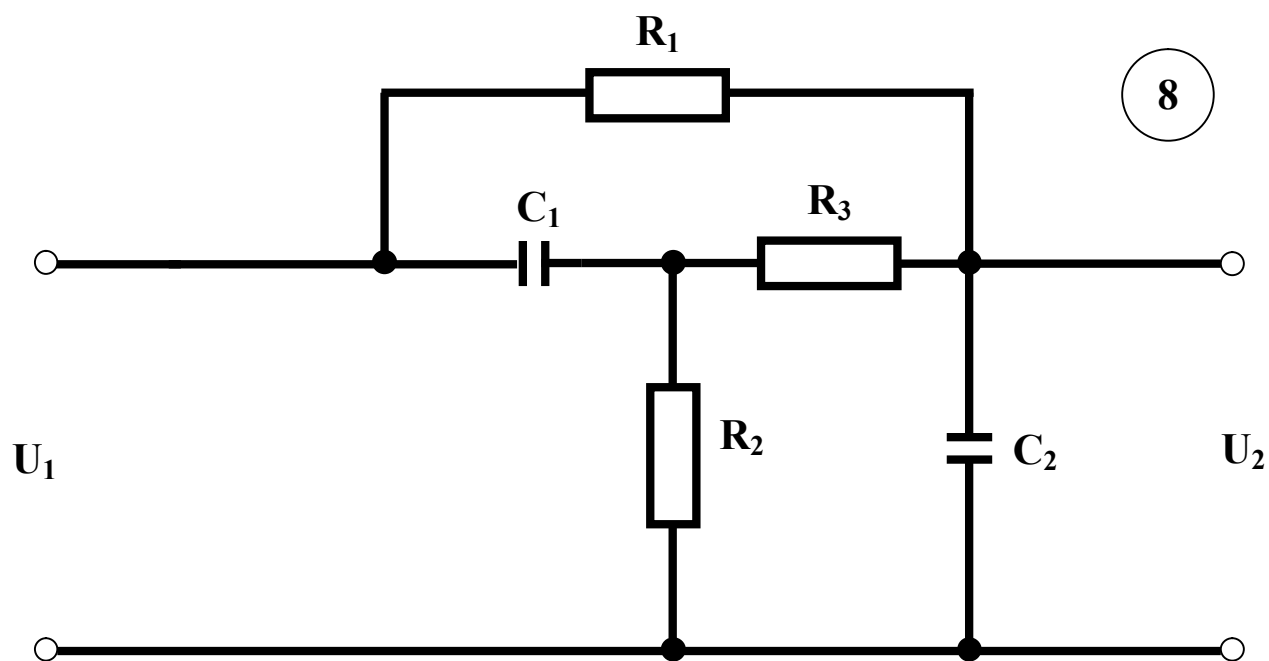
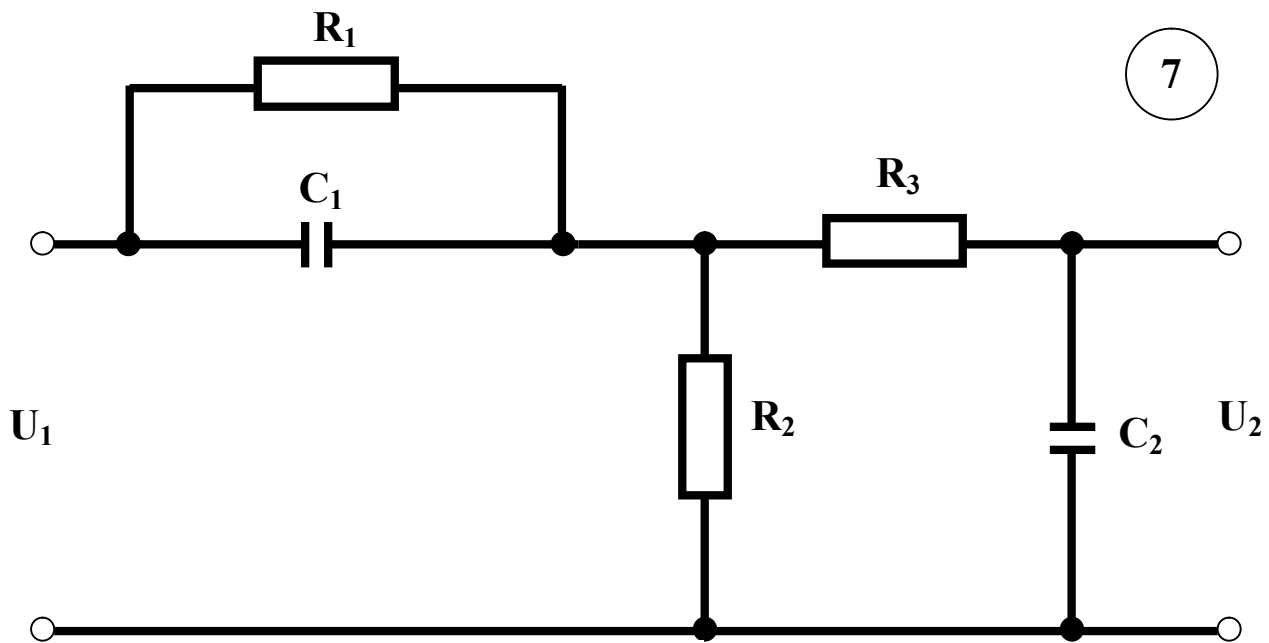
## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Асанов А. З. Математические модели динамических систем. Казань: изд-во Казан. гос. ун-та, 2007. 204 с.
2. Введение в математическое моделирование / Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2005. 440 с.
3. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов. СПб.: Лань, 2013. 192 с.
4. Дьяконов В. П. Matlab 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Серия «Библиотека профессионала». М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.
5. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
6. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Минск: Новое знание, 2013. 584 с.

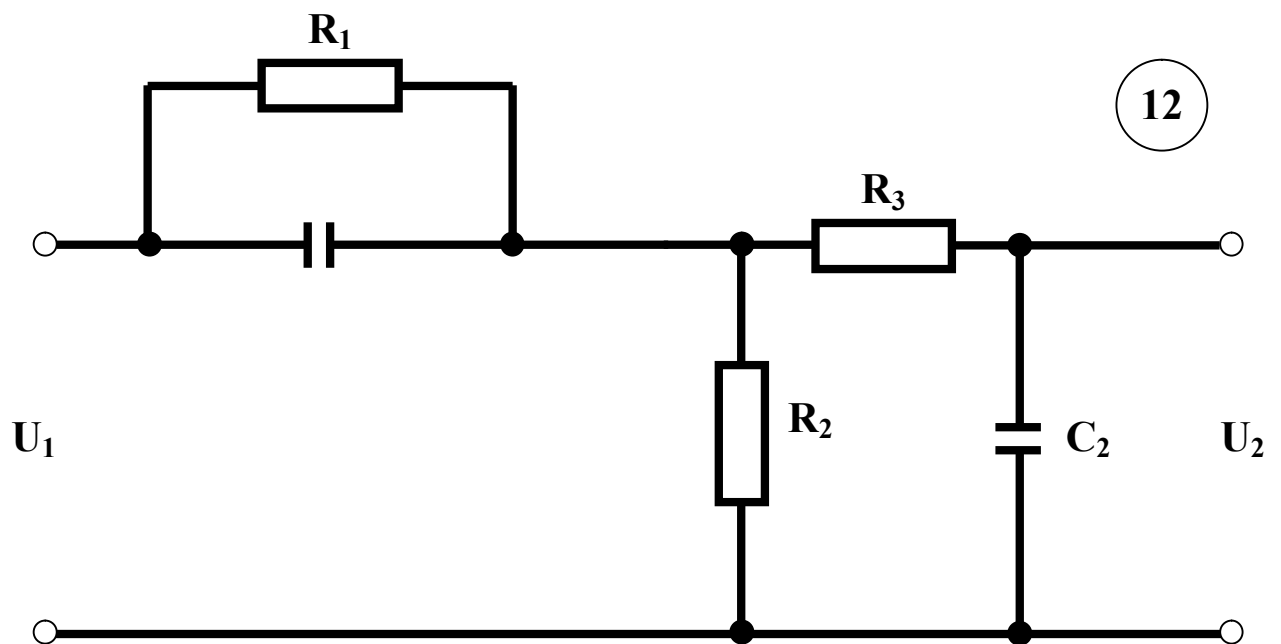
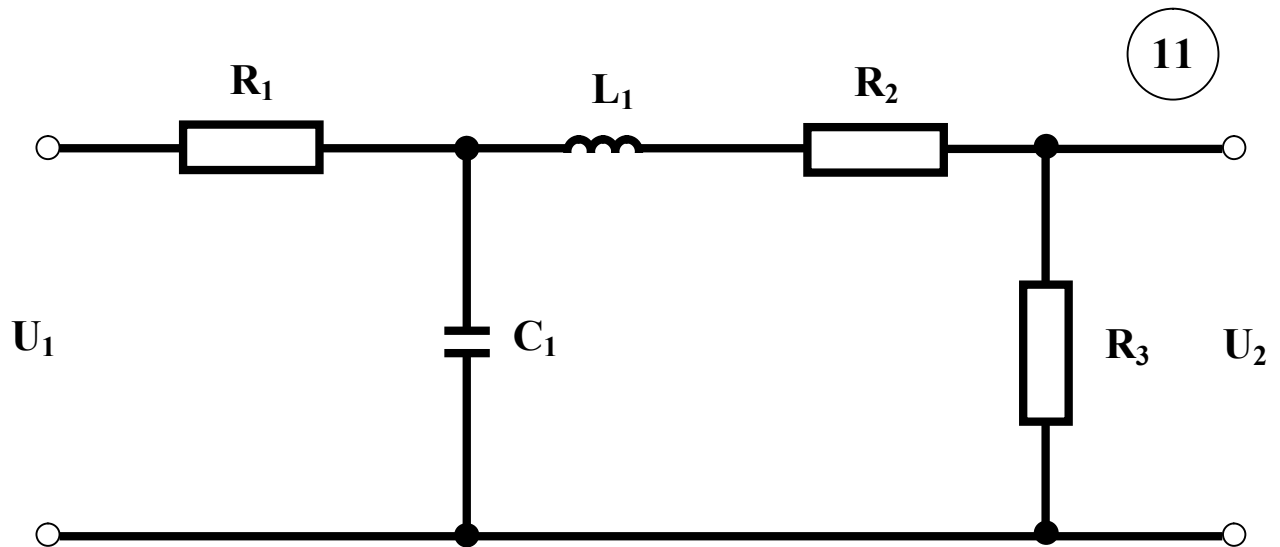
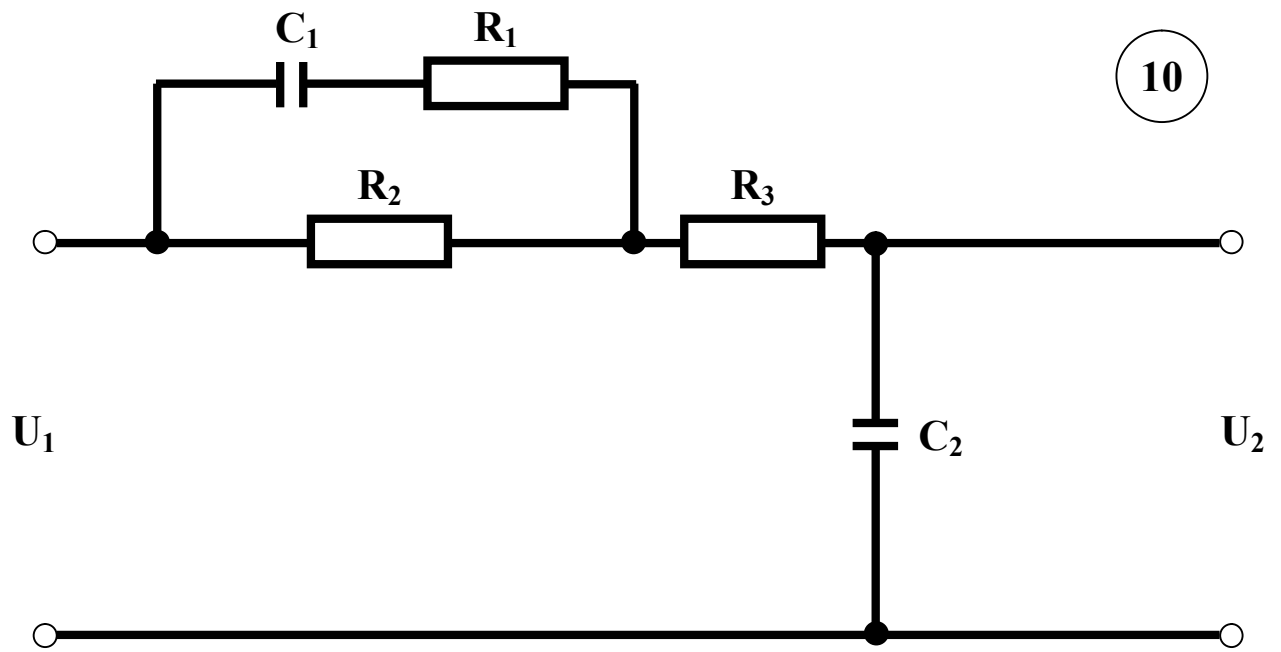
Приложение 1

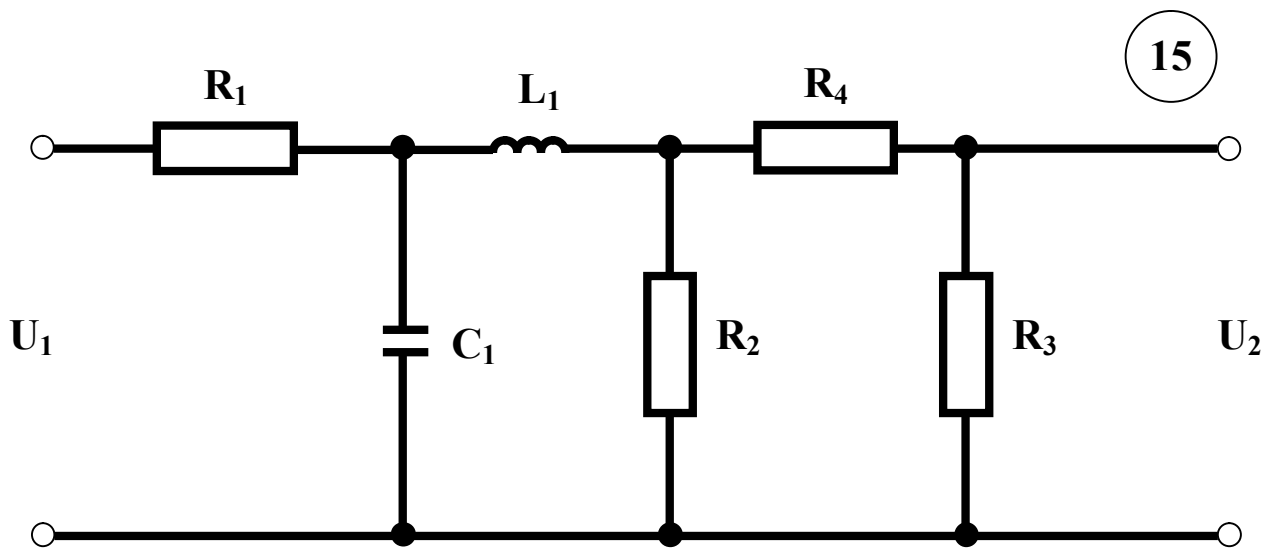
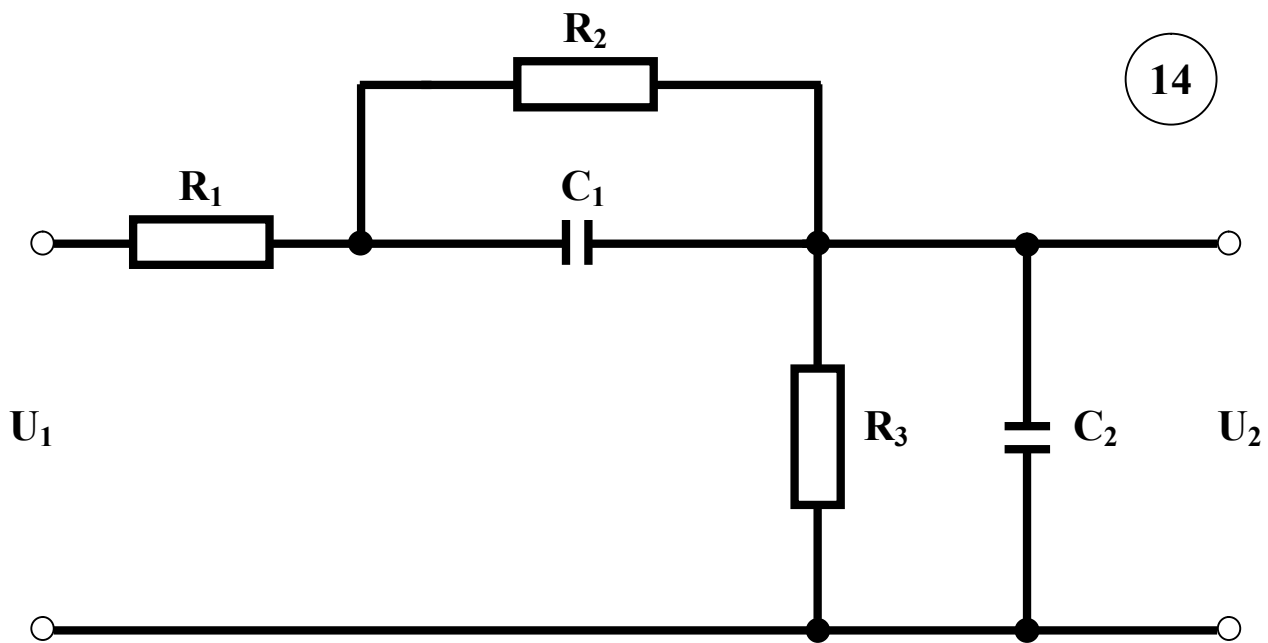
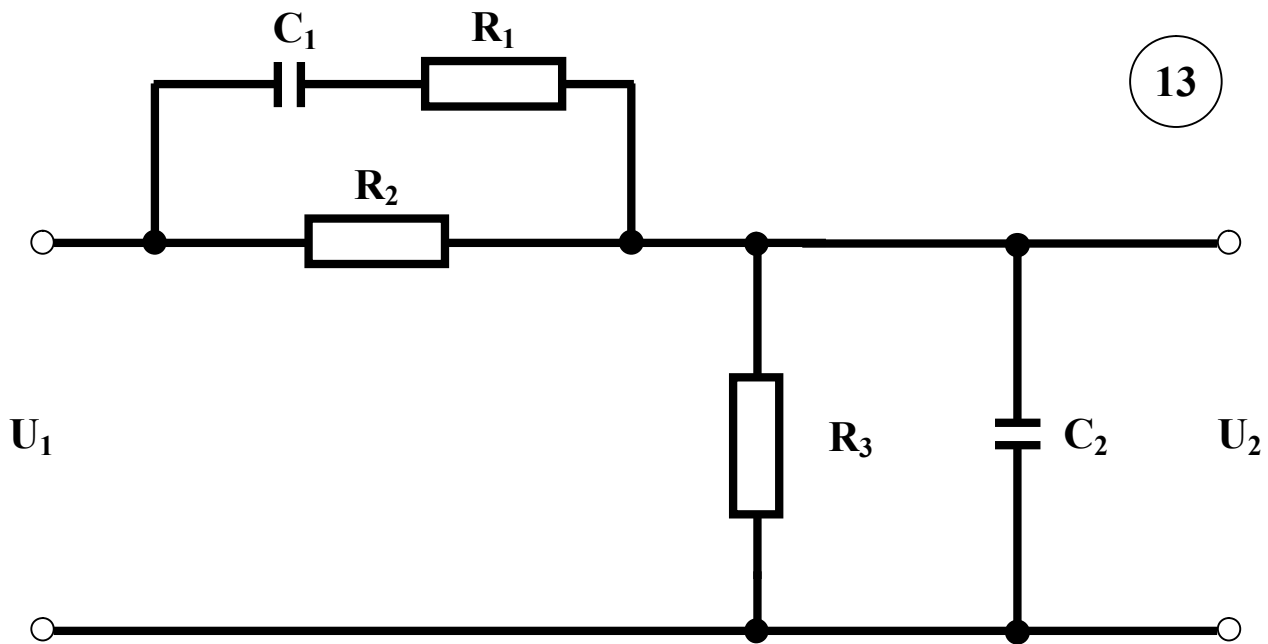


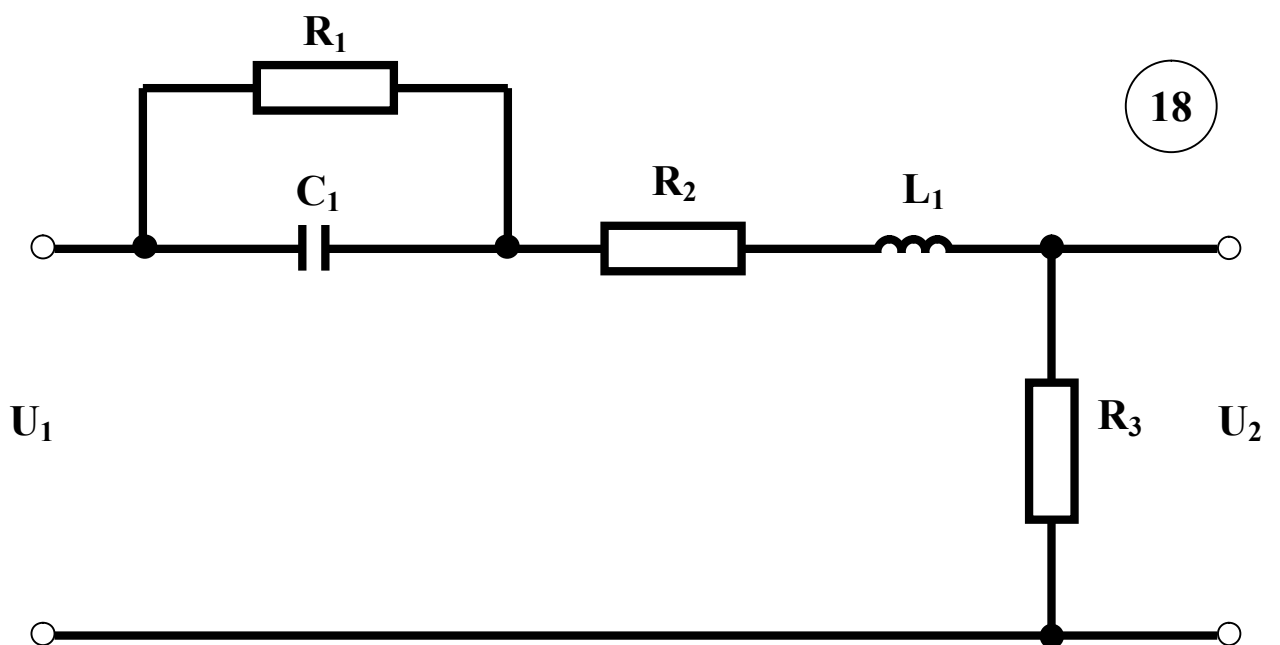
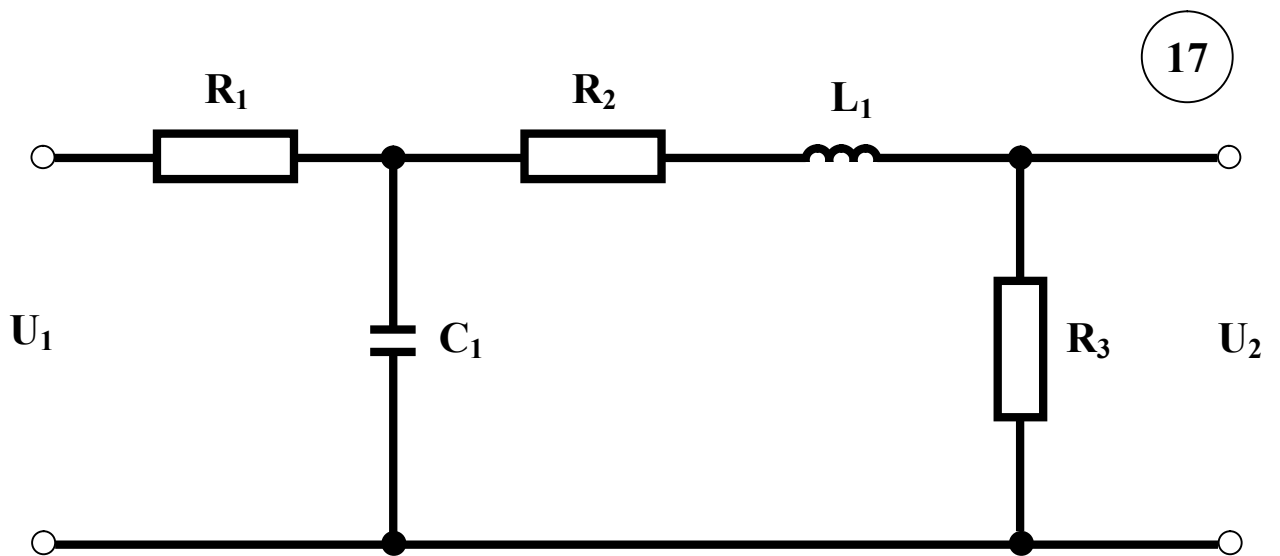
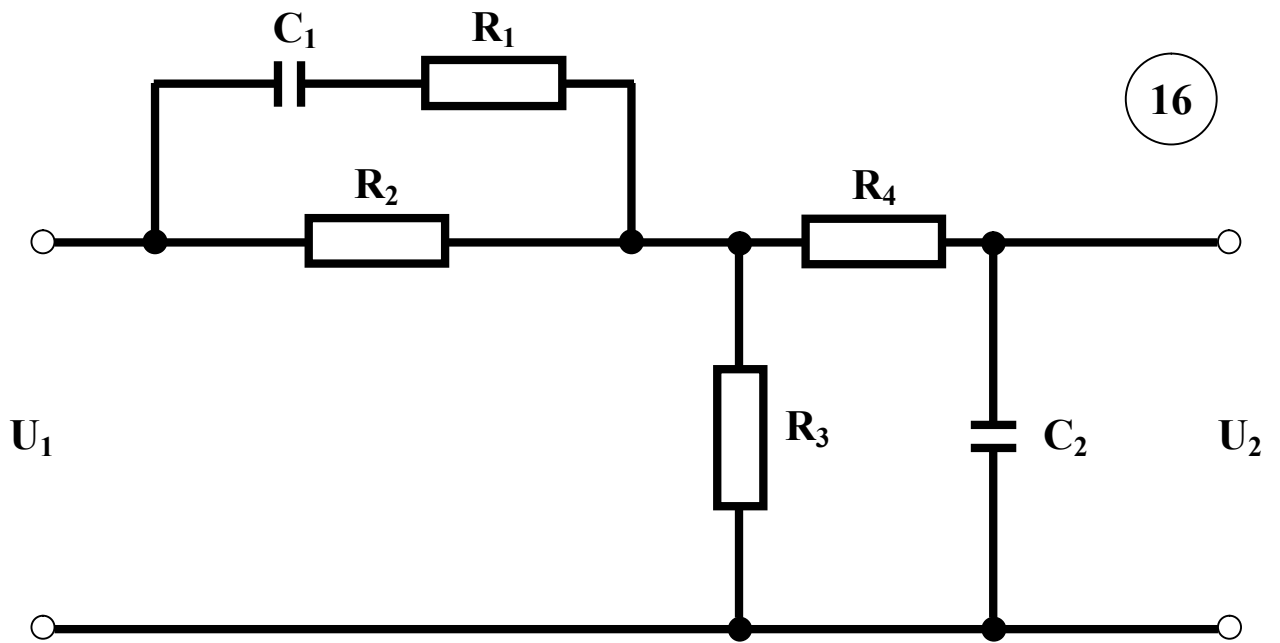


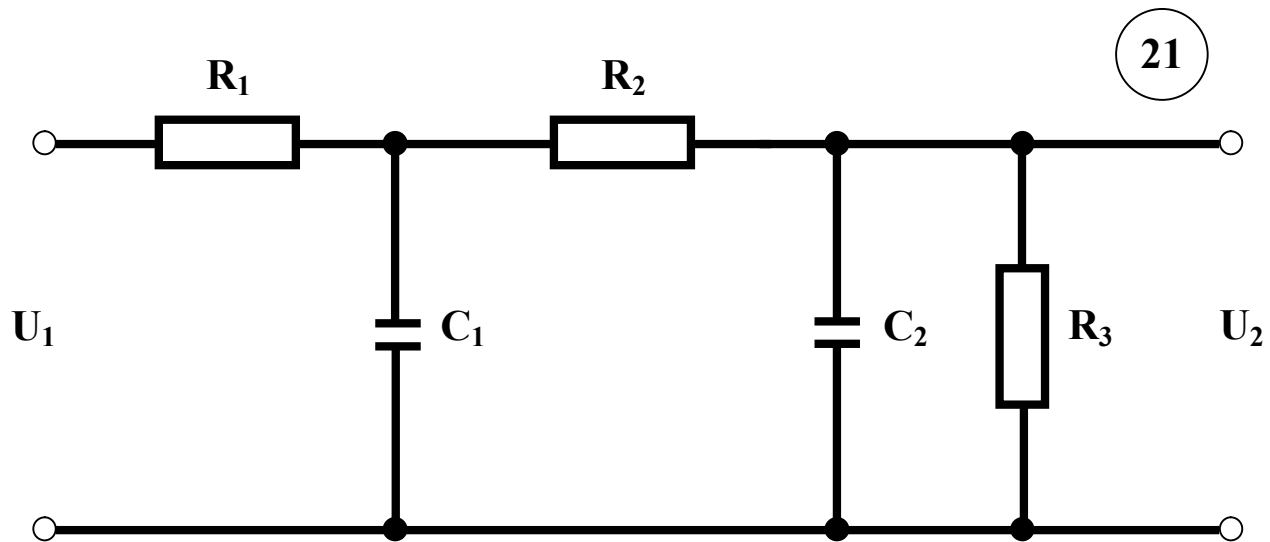
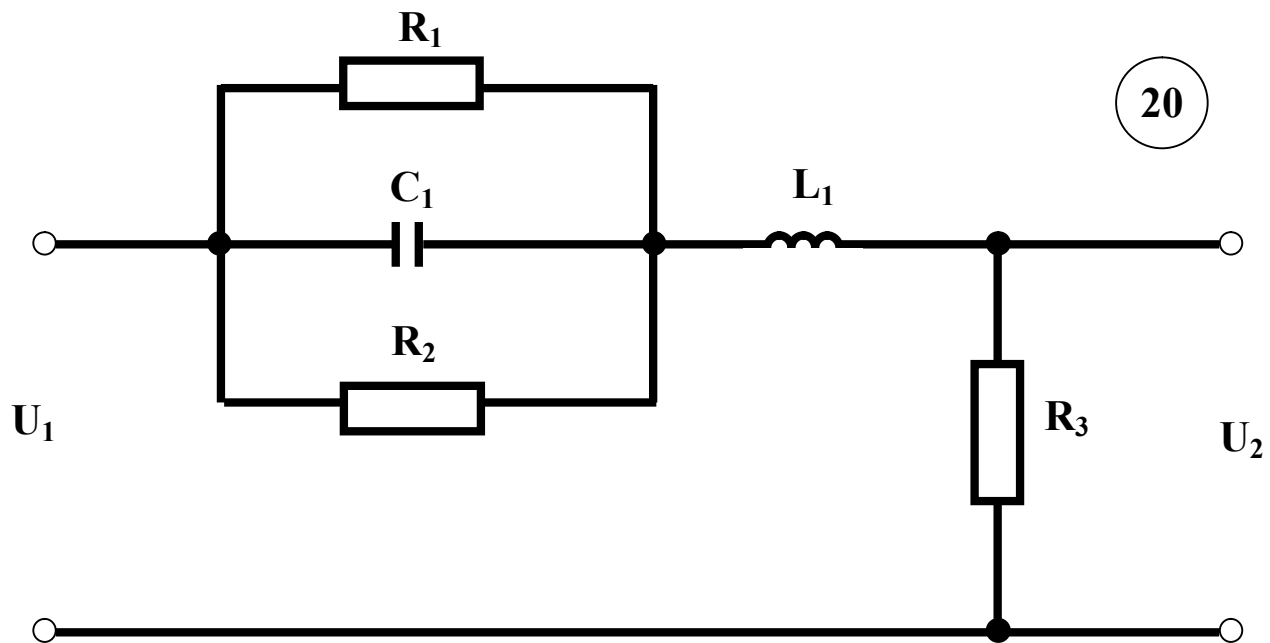
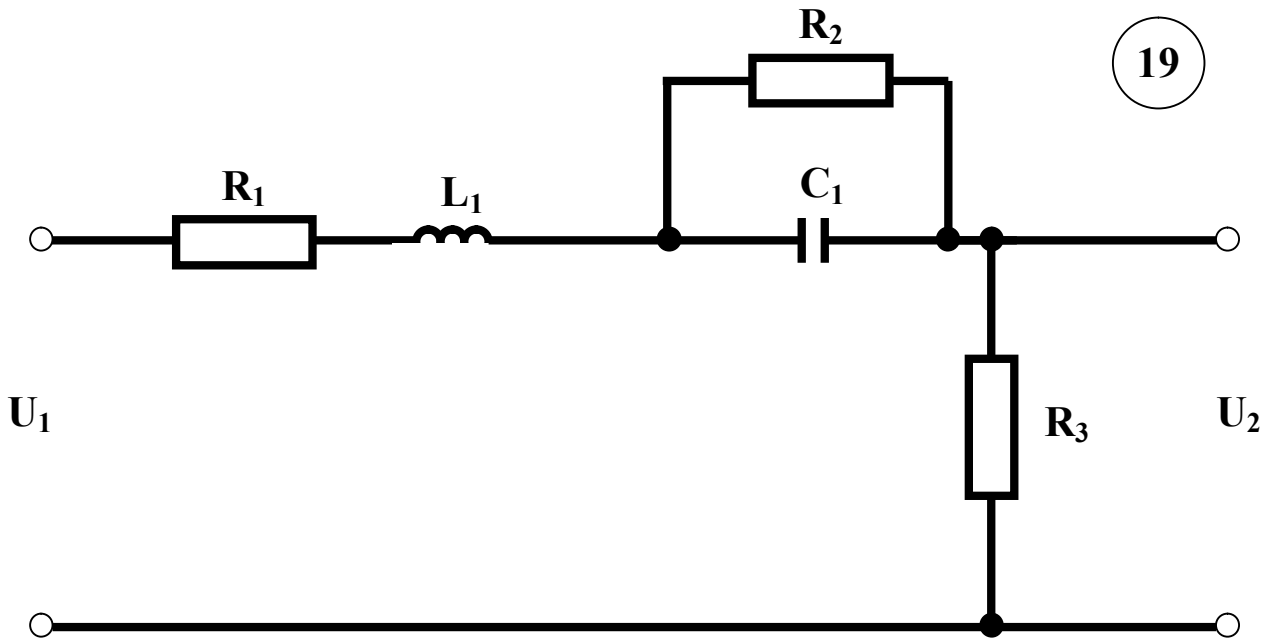


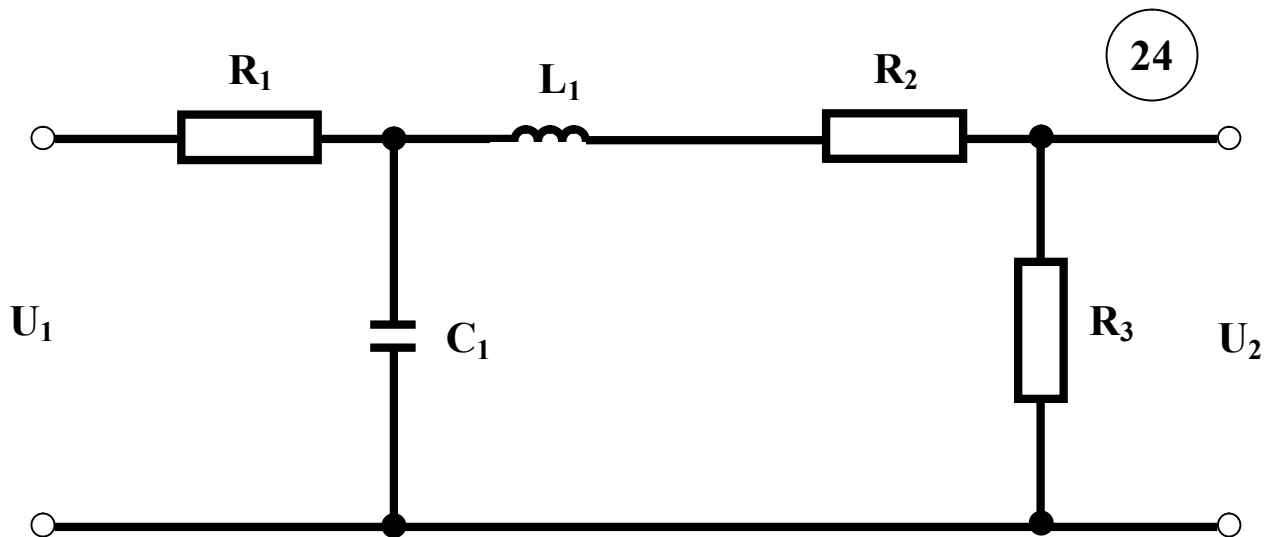
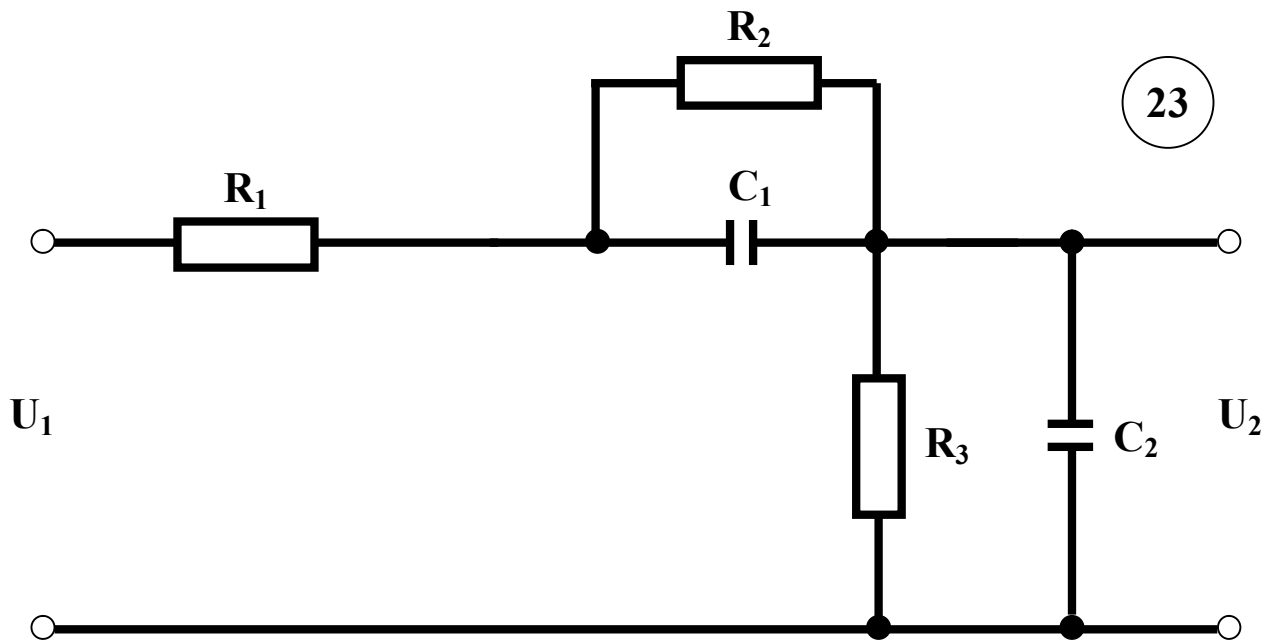
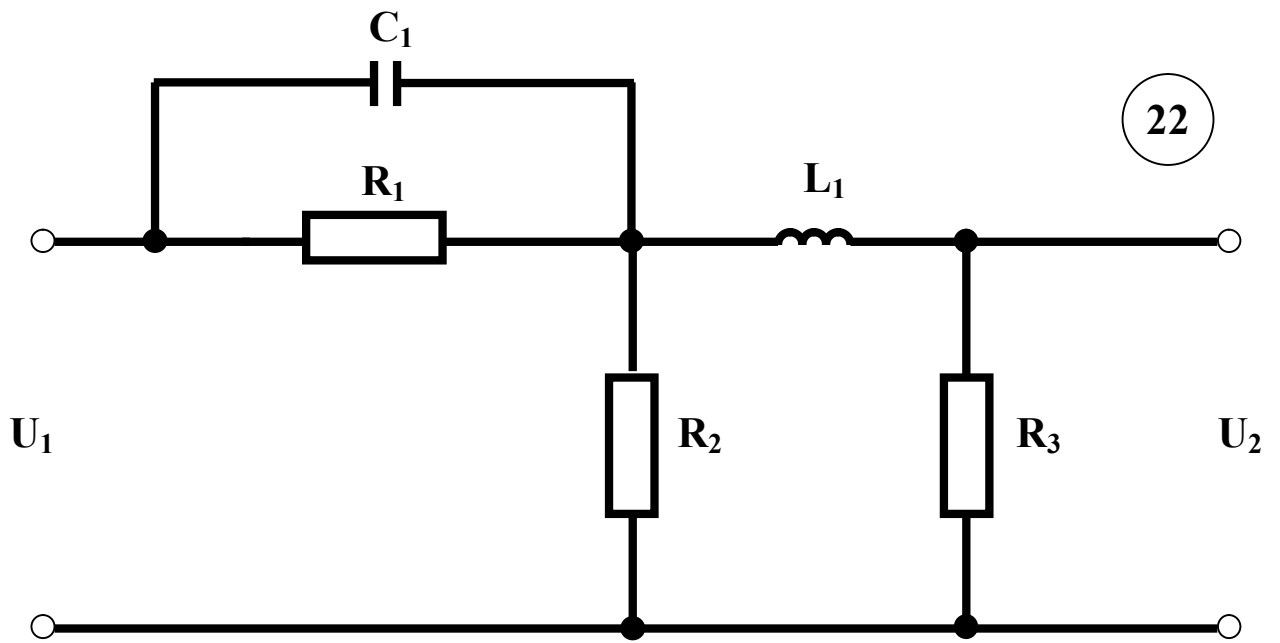


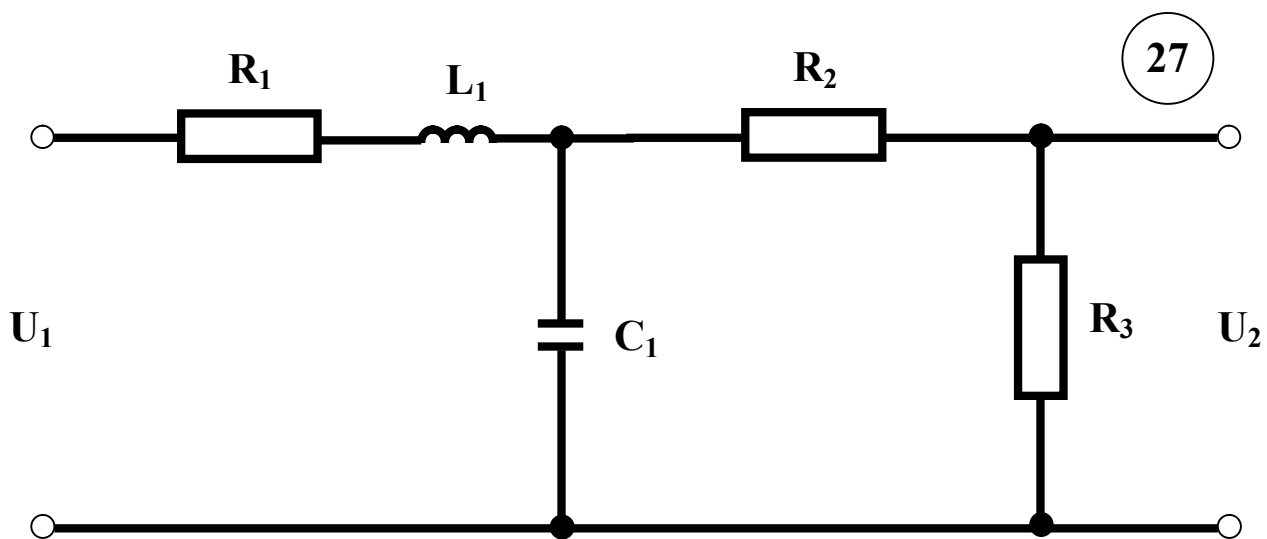
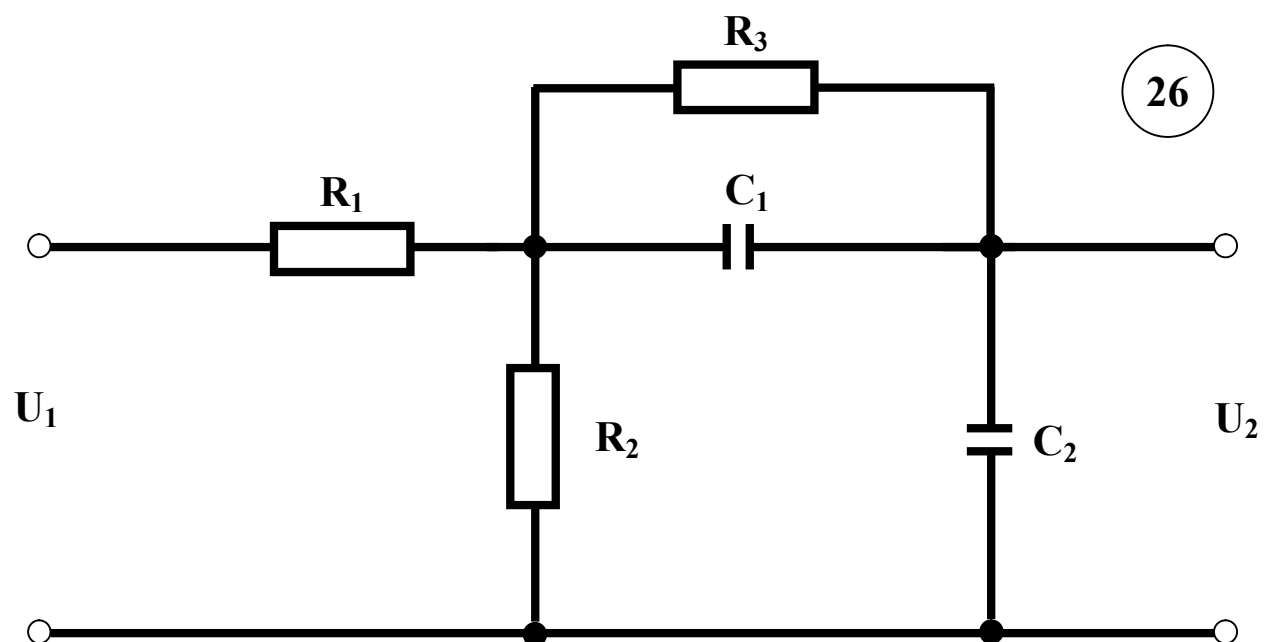
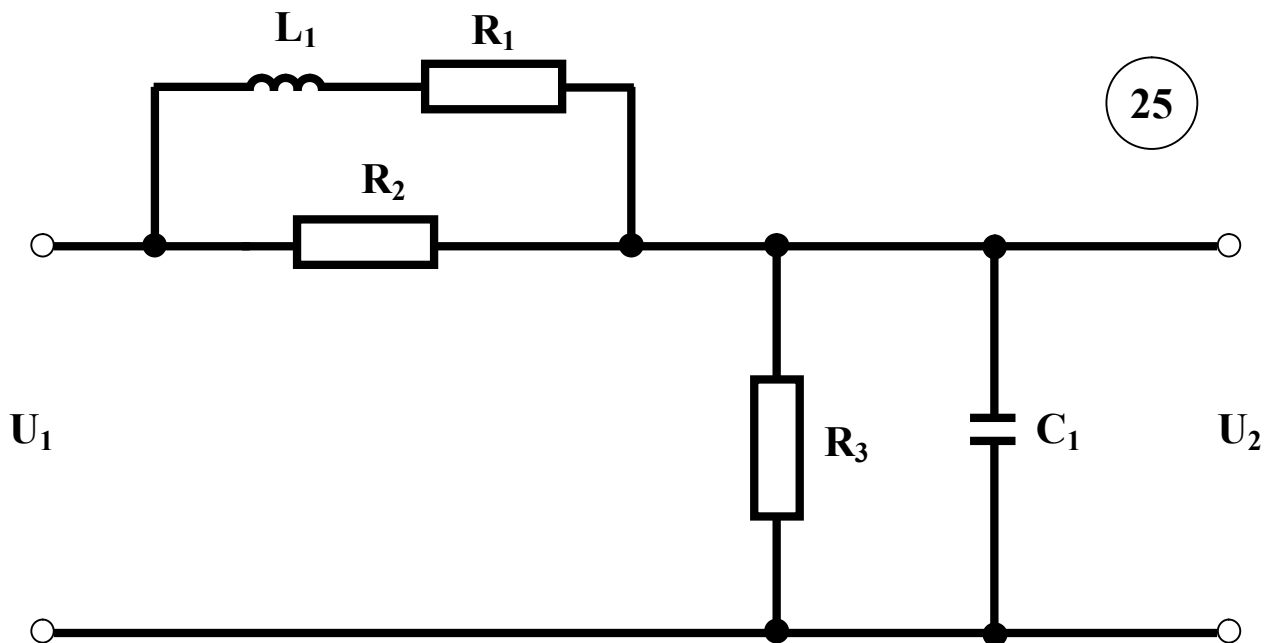


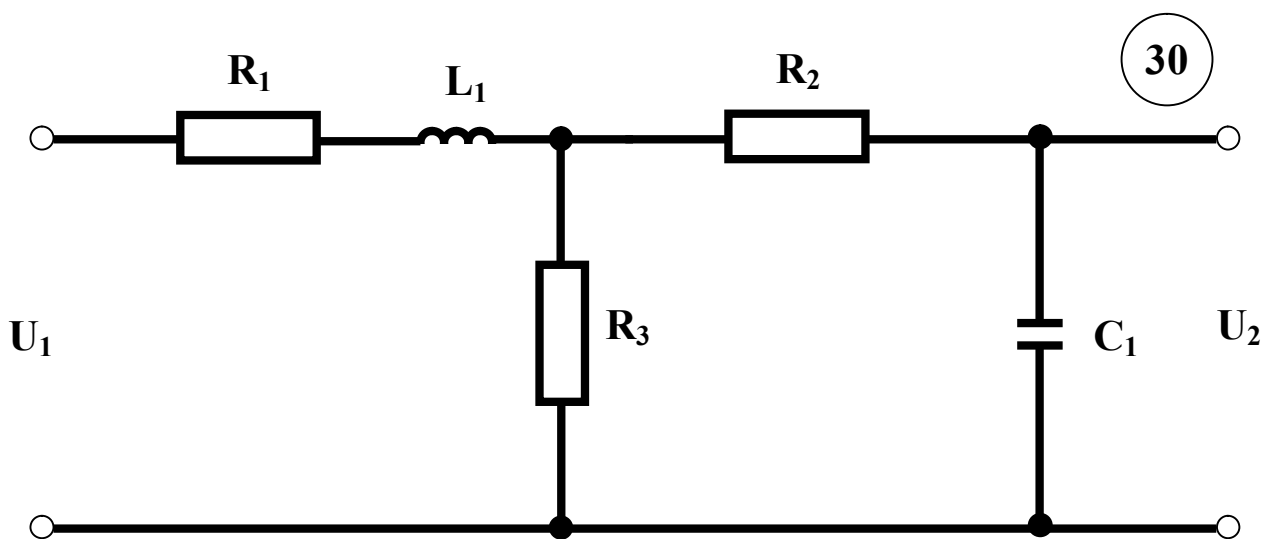
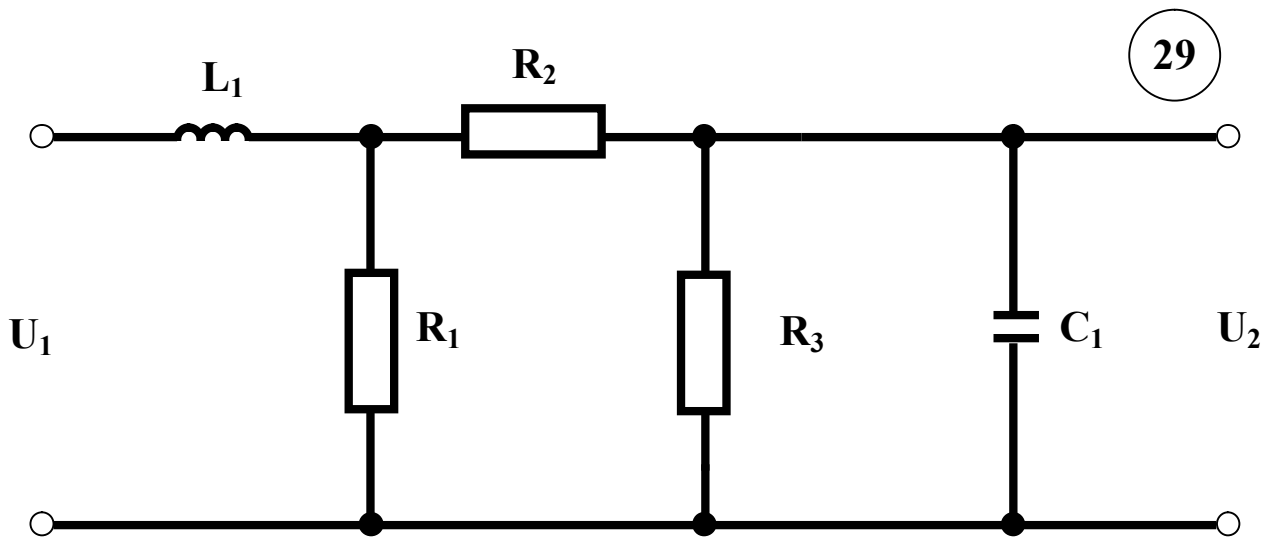
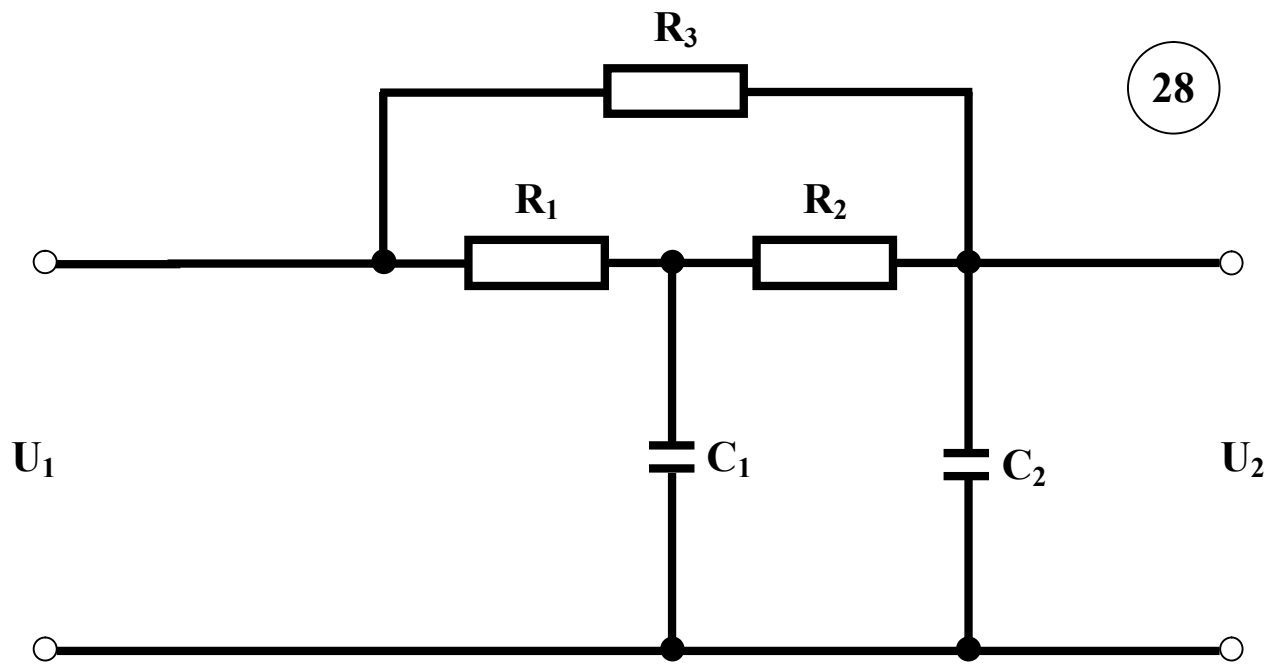












Свойства интегрального преобразования Лапласа

1. Линейность

$$L\left\{\sum_{i=1}^n k_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n k_i F_i(s).$$

2. Подобие

$$L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

3. Смещение

$$L\{e^{-\beta t} f(t)\} = F(s + \beta).$$

4. Свёртка

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right\} = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

5. Запаздывание

$$L\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s).$$

6. Дифференцирование изображения

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n [F(s)]^{(n)}.$$

7. Дифференцирование оригинала

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0).$$

8. Интегрирование изображения

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds.$$

9. Интегрирование оригинала

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

10. Предельные свойства

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$



### Приложение 3

Таблица основных оригиналов и изображений

№	Оригинал	Изображение
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
3	$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
4	$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
5	$t^n \cdot 1(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{\alpha t} \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
7	$e^{\alpha t} \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
8	$t \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$
9	$t \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$
10	$\text{sh}(\alpha t) \cdot 1(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
11	$\text{ch}(\alpha t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
12	$\frac{1}{2\alpha^3} (\sin(\alpha t) - \alpha t \cos(\alpha t)) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^2}$